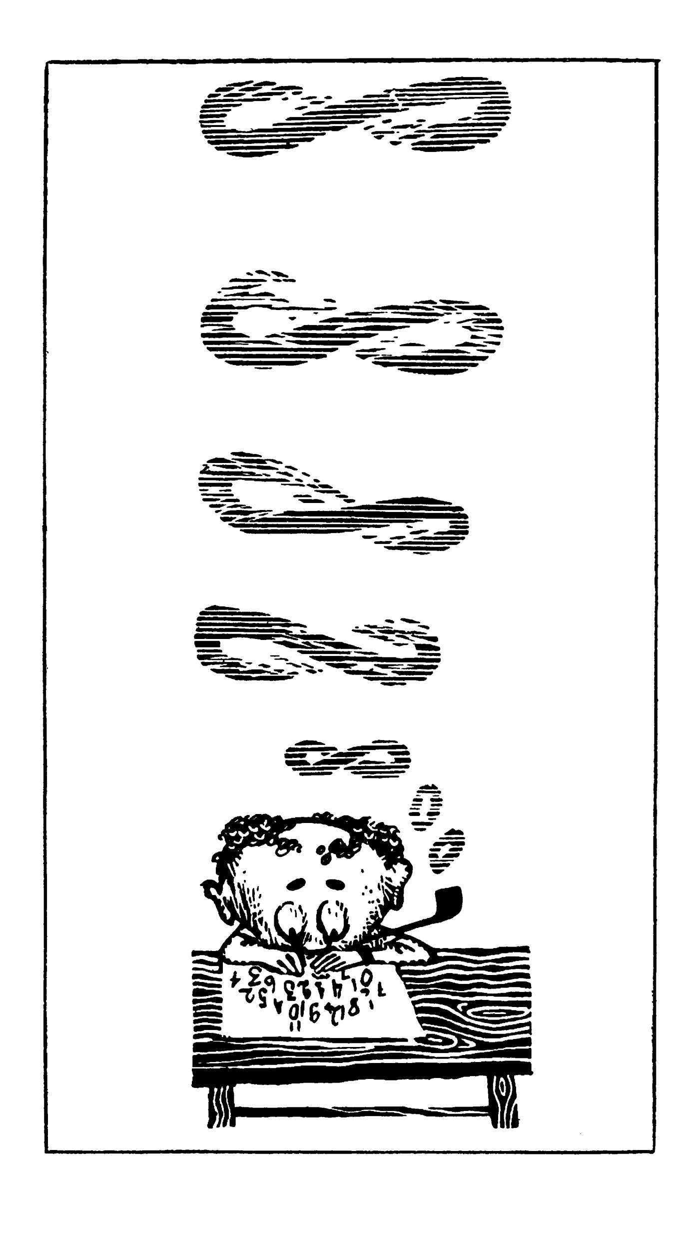
РОЗА ПЕТЕР

ИГРА С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ





РОЗА
ПЕТЕР

ИГРА
с бесконечностью

Перевод с немецкого
В. КИСУНЬКО

Издательство

ЦК ВЛКСМ

„Молодая

гвардия“

1967

51
П29

Знакомые с математикой лишь понаслышке склонны считать ее скучной и унылой наукой. Книга «Игра с бесконечностью» шаг за шагом, страница за страницей разрушает это представление, открывая читателю красоту и стройность здания математики. Математика предстает в ней как царица наук, как великое искусство.

Искусство это читатель постигает постепенно, незаметно для себя, увлекаясь описанием «игры с бесконечностью», которую с незапамятных времен ведет человечество, пользуясь математикой.

Пеіер Роза

ИГРА С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ. Пер. с нем. В. Кисунько М., «Мол. гвардия», 1967.

368 с., с илл. (На обл «Эврика»)

Редактор *В. Федченко*
Художник *А. Блох*
Художественный редактор *Г. Позин*
Технический редактор *Г. Лещинская*

Подписано к печати 11/II 1967 г. Бум. 84×108¹/₃₂. Печ. л. 11,5(19,32). Уч.-изд. л. 15,7. Тираж 50 000 экз. Заказ 777. Цена 93 коп., Т. П 1966 г., № 127.

Типография «Красное знамя» изд-ва «Молодая гвардия». Москва, А-30, Сущевская, 21.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книгу эту я писала прежде всего для представителей интеллигенции, не занимающихся специально математикой, — для писателей, художников и гуманитариев. Люди эти, их работа открыли передо мной много прекрасного в мире; в благодарность за это я хочу распахнуть перед ними двери математики. Мне хотелось бы, чтобы они поняли, что мы вовсе не отличаемся друг от друга столь сильно, как принято говорить и думать. Я люблю математику не только потому, что она находит применение в технике, но также и потому, что она прекрасна, потому, что человек, если хотите, вложил в нее любовь к игре, и потому, что математика в состоянии справиться даже с самой увлекательной игрой — сделать возможным «ухватить бесконечность». Математика дает нам четкие сведения о бесконечности, о вещах, которые трудно даже вообразить. И в то же время она поразительно человечна и меньше всего похожа на пресловутое «дважды два — четыре»: математика несет на себе печать никогда не кончающейся человеческой деятельности.

Доступность книги не означает, что предмет излагается поверхностно. Я стремилась добиться полной ясности понятий. Я уверена, что представление этих понятий в новом свете окажется небезынтересным и даже полезным и математику и — что уж совершенно несомненно — учителю. Я ограничиваюсь только не слишком утомительной систематизацией, определяю вещи только действительно наглядные и опускаю технические подробности (я не ставила своей целью познакомить читателя при помощи этой книги с математической техникой). Если книга эта попадет в руки ученика или студента, интересующегося предметом, то такой читатель сможет найти здесь — я позволю себе такое выражение — образ математики как единого целого. Сначала я не собиралась давать полное представление о предмете; материал расширялся сам по мере работы над рукописью, и оказывалось, что можно опустить все меньше и меньше частных вопросов. И если вначале меня пугали длинноты, то вскоре я целиком и полностью поддалась ощущению того, что я отыскиваю какую-то старую безделушку, смахиваю с нее пыль,— и вещь эта начинает блестеть у меня в руках.

Быть может, тон книги покажется читателю временами наивным, однако я охотно принимаю этот упрек: наивное отноше-

ние к простым фактам всегда неотделимо от настроения, сопровождающего новое открытие.

Впервые мысль об этой книге возникла у меня после разговора с писателем Марцелом Бенедеком.

На источники я не ссылаюсь. Многому я научилась у других, однако сегодня это нельзя, невозможно уже разложить на составные элементы. То и дело приходило мне на ум сравнение, происхождение которого я еще не успела забыть; когда кто-либо давал точную формулировку того или иного «метода», я не хотела писать о том же предмете иначе ради одной только превратно понимаемой оригинальности. Это относится в особенности ко всему тому, что я переняла от Ласло Кальмара. Мы были однокурсниками, и он был моим настоящим учителем математики: то, что я пишу, всегда и нерасторжимо пронизано его мыслями. Я должна специально оговориться, что «пример с шоколадом», использованный в книге при рассмотрении бесконечных рядов, впервые я услышала от него; то же можно сказать и о всем ходе беседы, которая нам с читателем еще предстоит, когда мы подойдем к вопросу о построении логарифмических таблиц.

Называя имена, я буду также цитировать моих маленьких безвестных сотрудниц со школьной скамьи; пусть уж они сами узнают себя. Здесь я вспоминаю мою 15-летнюю ученицу Катю, которая уже окончила городскую школу и с которой я говорила об этой книге все время, пока писала ее. Я благодарю Катю за то, что смогла посмотреть на материалы также глазами способной ученицы.

Самой большой помощью, однако, были замечания читателя, не занимающегося математикой. Мой добрый друг, Бела Лей, театральный режиссер, который долгое время был убежден, что никаких способностей к математике у него нет, переживал со мной все этапы рождения книжки; лишь тогда ставила я точку в конце того или иного раздела, когда Бела Лей был доволен. Без него, пожалуй, книги этой не было бы вовсе.

Глазами математика проконтролировал всю рукопись Пауль Сциллаг; в последний момент Ласло Кальмар также нашел время для того, чтобы бегло просмотреть книгу; им я обязана тем чувством уверенности. с которым отдаю книгу на суд читателя.

Будапешт, осень 1943 г.

РОЗА ПЕТЕР

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПОЛЬСКОМУ ИЗДАНИЮ

От 1943 года нас отделяет 17 нелегких лет. Математик Пауль Сциллаг и моя ученица Катя (Кэтэ Фукс) стали жертвами фашизма.

Отец моей ученицы Ани, который был в те же годы осужден за участие в подпольной борьбе на 17-летнее тюремное заключение, был освобожден, и кто знает, может быть, когда Аня встретилась с ним, в ее воображении пересеклись, наконец, те прямые линии, которые постоянно приближаются одна к другой. Книга эта, полностью законченная, не могла появиться в стране, где господствовали нацисты. Сложенные в магазине экземпляры были частично уничтожены во время пожара, вызванного бомбой; остаток появился в 1945 году, во время первого после освобождения «Дня книги». Еще в 1944 году мне удалось переслать в Швейцарию сделанный мною самой очень плохой перевод на немецкий язык — мне хотелось, чтобы хоть один экземпляр моей книги наверняка пережил войну.

Читатель не должен забывать, что книга показывает, как смотрел на вещи автор в 1943 году, и что только кое-где были внесены небольшие изменения. Однако же самый конец книги пришлось всерьез переработать: с тех пор мне удалось доказать совместно с Ласло Кальмаром, что существование так называемых «абсолютно неразрешимых проблем» представляет собой вывод из теоремы Геделя об относительно неразрешимых проблемах, а вывод ни в коем случае не может иметь большего удельного веса, чем утверждение, из которого этот вывод следует.

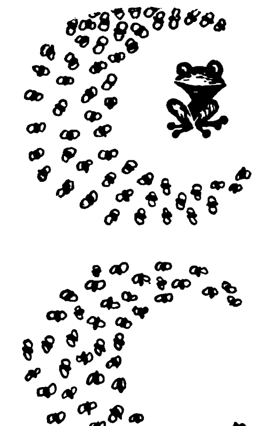
Будапешт, осень 1960 г.

РОЗА ПЕТЕР

ВСТУПЛЕНИЕ

Я часто вспоминаю разговор с одним из моих друзей-писателей. Он сокрушался тогда по поводу того, что не может считать себя вполне образованным человеком, будучи абсолютным невеждой в математике. Этот недостаток сказывался даже в его повседневной писательской работе. Он пользовался при сравнениях математическими понятиями, которые запали ему в память еще на школьной скамье, — например, системой координат. Однако же друг мой был убежден, что для него, писателя, нашлось бы в математике еще очень и очень много полезного материала и как рассказчик он лишен возможности черпать из этого богатого источника. С другой стороны, сетования эти казались ему бесплодными из-за неспособности углубиться в математические дебри.

Воспоминание об этом разговоре не давало мне покоя, побуждало к размышлениям и заставляло строить планы. То, что здесь широчайшее поле деятельности, для меня было ясно с самого начала; ведь для меня в математике решающим является эмоциональный элемент, а разве не из этого источника черпают писатели и художники? Приведу пример из моих студенческих лет. С группой университетских друзей мы отправились смотреть пьесу Бернарда Шоу. По ходу действия герой просит героиню открыть ему тайну: как это она умудряется не только ладить, но и управлять даже самыми строптивыми людьми? Героиня приходит к выводу, что получается так потому, что, в сущности, она держит всех на значительном расстоянии от себя И тут одна из студенток воскликнула вдруг: «Да ведь это точно по математической теореме, которую нам сегодня доказали!» Математическая задача была такая: можно ли из данной внешней точки подойти к множеству точек таким образом, чтобы приблизиться сразу ко всем точкам множества? Ответ таков: можно при условии, что данная точка достаточно удалена от множества точек.



Из данной точки приблизиться сразу ко всем точкам множества нельзя: приближаясь к одним точкам, мы в то же самое время будем удаляться от других.



Из этой точки можно приблизиться одновременно ко всем точкам множества.

Что же касается утверждения моего друга, писателя, что он якобы не способен углубиться в математические дебри и что, например, ему никогда не понять столь часто употребляемых слов, как «производная» или «дифференциал», — этому я вовсе отказывалась верить. Я пробовала разложить весь путь к пониманию этих слов на самые простые и ясные шаги — насколько это было возможно, — и тогда открыла поразивший меня факт: математик и представить не может себе, сколь тяжкий труд для профана понять даже самую несложную математическую формулу. Точно так же неопытный педагог не поймет, что малыш, даже двадцать раз произнеся поочередно буквы «ш», «у», «т», «к», «а», еще не может сообразить, что речь идет о шутке. А здесь речь вовсе не о шутке.

Это открытие навело меня на долгие и долгие размышления. До той поры я искренне полагала, что профаны не знают математики лишь потому, что не написана еще хорошая, общедоступная книга, например, в области дифференциального исчисления. То, что люди интересуются этими вопросами, очевидно. Читатели расхватывают буквально все, что выходит из печати по этому вопросу. До сих пор, однако, такой книги не было написано математиком-специалистом. Я имею в виду людей, которые на самом деле являются специалистами, которые точно знают, что и до какой степени можно упрощать, не прибегая, однако, к искажениям. Специалист не должен также подсовывать в какой-то новой, симпатичной обертке старое горькое

лекарство — школьную математику; он должен представить вещи в таком виде, чтобы они сами бросались в глаза. Такой автор должен преисполниться радостью математического творчества, тогда его рассказ сможет стать захватывающим, сможет увлечь читателя.

Тут же мне приходит в голову мысль, что даже самая понятная книга может оказаться недоступной для некоторых читателей. По-видимому, отличительное качество математики в том, что она не боится неприятной работы. «К математике нет царских дорог», — сказал как-то Евклид своему владыке, и это значит, что даже для королей нельзя построить удобной дороги к математике. Математическую книгу нельзя читать поверхностно; часто нужно приложить усилие, чтобы усвоить необходимую абстракцию, но именно в таких муках и находит математик удовлетворение. Даже самая лучшая популярная книжка может быть понята только теми, кто захочет всерьез заняться этим трудом, кто решится повторять буквы и слоги до тех пор, пока ему не откроется смысл формул.

Однако же пишу я не для такого читателя. Я пишу о математике без формул, как бы с точки зрения «математического настроения». Не знаю, насколько мне это удастся. Отказываясь от формул, я отказываюсь от главного свойства математики. Форма неотделима от содержания — это хорошо известно и математику и поэту; но представьте только себе, как передать настроение сонета вне формы сонета! И все же я отважилась на такую попытку: может, и в этом случае мне все же удастся сохранить что-то от истинного духа математики.

Только в одном я не могу облегчить читателю задачу: нельзя менять местами те или иные разделы, нельзя оставлять их «на потом» либо ограничиться беглым просмотром. В математические дебри можно забираться только постепенно, шаг за шагом. Здесь важно каждое отдельное слово, каждая мелочь основана на пройденном материале, даже если это и не столь заметно, как в книге, изложенной с нудной систематичностью. Кроме того, если я прошу всматриваться в рисунок, самостоятельно нарисовать что-то или произвести несложный расчет, читателю следует выполнить мою просьбу. Взамен могу пообещать, что книга не будет скучной.

Я не стану пользоваться школьной математикой. Начну со счета и доведу вас до самой новой области математики — математической логики.

Часть I

УЧЕНИК ЧАРОДЕЯ

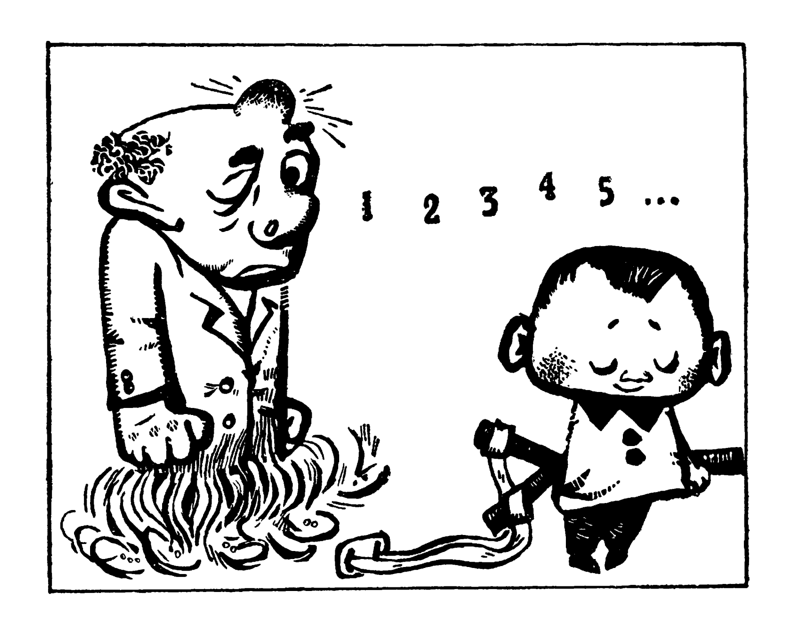
1. Игра на пальцах

Начнем с начала. Я не собираюсь писать об истории математики; впрочем, я могла бы сделать это, опираясь только на памятники письменности, но даже самые ранние из них много моложе других «истоков математики»! Попробуем представить себе первобытного человека во всей примитивности его жизни, в момент, когда он лишь только начинает считать. Здесь нам приходит на помощь сравнение с тем неразвитым человеком, который на наших глазах превращается в человека цивилизованного. Я имею в виду ребенка, который познает себя и мир, когда, например, играет своими десятью пальчиками. Быть может, «один», «два», «три», «четыре», «пять» — всего лишь сокращения того, о чем ребенок привык говорить: «этому дала — он дрова рубил», «этому дала — он щепу лупил», «этому дала — он печку топил», «этому дала — он воду носил», «а этому не дала — он дров не рубил, он щепу не лупил, он печь не топил, он воды не носил» — согласно сказочке о сороке-воровке, которая кашу варила и деток кормила. Я вовсе не шучу. Однажды я слышала от врача, что существуют психически больные люди, которые не могут различать свои пальцы, и это всегда связано с потерей способности вести счет.

Такая дремлющая в подсознании взаимосвязь счета с пальцами неразрывна также и у цивилизованных людей. Я думаю, что склонность человека к развлечению, к игре является также одним из источников математики и именно поэтому математика не только наука, но и — по крайней мере в той же степени — искусство.

В наши дни господствует взгляд, что счет был с самого начала сознательной, целенаправленной деятельностью. Может быть, первобытный человек хотел оценить размеры своего имущества и принялся пересчитывать принадлежащие ему звериные шкуры. Так могло быть. Однако же легко можно представить себе и то, что счет являлся какой-то магической церемонией. Ведь и поныне счет служит людям, стра-

дающим навязчивыми неврозами, своеобразным магическим способом отогнать какие-то навязчивые мысли: нужно посчитать, скажем, до двадцати, и лишь потом можно думать о чем-либо другом. Так



или иначе, идет ли речь о звериных шкурах или об отрезках времени, следующих один за другим,— счет всегда означает добавление к тому, что уже есть, еще одного шага.

Таким образом можно выйти за пределы десяти пальцев и тотчас же очутиться перед первым великолепным математическим детищем человека — перед бесконечной последовательностью чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Это так называемый натуральный ряд. Он бесконечен, потому что после каждого сколь угодно большого числа можно указать число, на единицу большее. Чтобы образовать эту последовательность, нужна была высокая степень способности абстраги-

рования, на которой числа становятся только тенями действительности. Число 3 означает здесь не три пальца, три яблока, три удара пульса и так далее, а то, что есть общего у всех этих вещей, выделенную из них абстракцию количества. Очень большие числа вообще не могут быть получены абстрагированием действительности: ни один человек не видел миллиарда яблок и не считал миллиарда ударов пульса. Такие большие числа мы представляем себе по аналогии с известными нам из действительности малыми числами. В нашем воображении мы можем вести счет все дальше и дальше, превышая все известные до сей поры числа.

Сложение

Однако человек не удовлетворился счетом. Тогда ему не оставалось ничего иного, как искать удовольствия в повторе, и человек пошел дальше. Это так же хорошо известно поэтам; постоянное возвращение к одному и тому же ритму, к одному и тому же тону — свойство живой материи. Точно так же маленькому ребенку не наскучивает игра: он упорно подбрасывает мяч, хотя бы это и стало невмоготу «здравомыслящим» взрослым.

Мы остановились на четырех? Добавим еще единицу! Еще единицу! И — еще единицу! Куда мы пришли? Очевидно, мы получили семь — точно так же, как если бы сразу добавили три. Таким образом, мы открываем сложение:

$$4+1+1+1=4+3=7.$$

Умножение

Поиграем теперь еще в сложение: прибавим к 3 еще 3, и еще 3, и еще 3. Таким образом, мы уже четырежды взяли 3. Коротко это можно выразить так: 4 раза по 3 равно 12; символически:

$$3+3+3+3=4\cdot 3=12.$$

Эту операцию мы называем умножением.

Возведение в степень

Отведав однажды повторения, мы не можем остановиться. Поступим точно так же с умножением. Умножим 4 на 4 и еще раз на 4. Получаем:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Такое повторение, такое многократное применение умножения называется возведением в степень. 4 здесь является основанием, а при помощи маленького числа, помещенного вверху справа — так называемого показателя степени,— мы указываем, сколько четверок следует перемножить. Следовательно, при таком обозначении мы можем записать:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Как видим, результаты наших «повторов» с каждым разом становятся больше: $4 \cdot 3$ больше, чем $4+3$, а 4^3 еще больше, чем $4 \cdot 3$. Веселые повторы уносят нас, таким образом, ко все более и более крупным числам. Это станет видно еще отчетливее, если мы начнем повторять многократно возведение в степень. Возведем сначала 4 в 4-ю степень:

$$4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256.$$

Если бы мы теперь захотели возвести 4 в степень 4^4

$$4^{4^4} = 4^{256} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots,$$

то мы бы порядком устали, только выписывая четверки. Мы должны были бы написать 256 четверок, а затем нужно было бы еще выполнить умножение! В результате получилось бы невообразимо большое число, поэтому внемлем голосу здравого рассудка: хотя постоянное повторение очень удобно, мы, однако, не будем пользоваться в наших рассуждениях многократным повторением операции умножения.

Согласимся, пожалуй, с утверждением: человеческий разум испытывает всякое попадающееся ему орудие, но оставляет себе только то, что полезно и целесообразно.

Сложение, умножение и возведение в степень оказались очень полезными и целесообразными для деятельности человека. Поэтому они навсегда получили право гражданства в математике. Открыты также их свойства, которые упрощают счет. Большим облегчением является, например, то, что $7 \cdot 28$ удается подсчитать не только путем семикратного сложения 28, но также и при помощи разложения 28 на два слагаемых и последовательного их умножения. Подсчет произведений $7 \cdot 20$ и $7 \cdot 8$ проделать очень легко, а их сумму $140 + 56$ можно также отыскать без какого-либо труда. При сложении многих чисел полезно помнить, что перемена мест слагаемых не меняет суммы. Таким образом, сложение, например, $8+7+2$ можно выполнить и так: $8+2=$ $=10$ и $10+7=17$. Тем самым удается легко увильнуть от необходимости проводить «неприятное» сложение $8+7$. Нужно только установить, что сложение представляет собой именно добавление того количества единиц, которое содержит последующее слагаемое; тотчас же становится ясно, что перестановки не меняют результата.

Труднее обнаружить то же самое в случае умножения: $4 \cdot 3$ означает $3+3+3+3$, в то время как $3 \cdot 4$ означает $4+4+4$. И сразу вовсе не очевидно, что точь-в-точь.

$$3+3+3+3=4+4+4.$$

Однако это станет немедленно ясно, едва мы сделаем рисунок. Возьмем три точки и разместим их в четырех строчках таким образом:

. . .
. . .
. . .
. . .

Каждый заметит, что точно такой же рисунок мы получим, если троекратно нарисуем рядом друг с другом по четыре точки, расположенные следующим образом:

. . . .
. . . .
. . . .

И поэтому на самом деле: $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$. Поэтому множимое и множитель математики обозначают общим названием — сомножители.

Для примера рассмотрим еще одно из свойств — возведение в степень:

$$\underline{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \underline{4 \cdot 4} = 4^5$$

Если нас утомит многократное умножение, мы можем устроить себе короткий отдых. Произведение трех первых четверок дает 4^3 и остается еще 4^2. Таким образом,

$$4^3 \cdot 4^2 = 4^5.$$

Показатель результата равен 5, но это то же самое, что $3+2$. Две степени числа 4 мы можем, таким образом, перемножить, складывая показатели. И так всегда. Например:

$$5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = \underline{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \underline{5 \cdot 5} \cdot \underline{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^9,$$

а $4+2+3$ равно именно 9.

Вспомним еще раз пройденный нами путь. Ко всем действиям мы пришли при помощи счета. Можно было бы спросить: все это хорошо, а как быть с вычитанием и делением? Но эти действия не что иное, как обратная сторона действий, уже рассмотренных нами (точно так же, как извлечение корня и логарифмирование). Например, $20:5$ означает, что мы знаем уже результат умножения — число 20 — и ищем число, которое, будучи взято 5 раз, даст нам 20. В этом случае легко найти такое число, потому что $20 = 5 \cdot 4$. Однако не всегда это так просто; не всегда такое число вообще существует. Например, в числе 23 число 5 не содержится без остатка, — ведь $4 \cdot 5 = 20$ — этого мало, а $5 \cdot 5 = 25$ — уже слишком много. Поэтому мы должны удовлетвориться меньшим числом и сказать, что число 5 содержится в числе 23 четыре раза, однако остается остаток 3.

Ситуации такого рода, очевидно, доставят нам больше хлопот, чем беззаботные повторения. Обратные действия означают, как правило, коварную работу; именно поэтому их так любят атаковать математики в своих исследованиях. Как известно, мате-

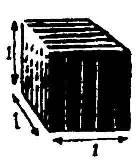
матик — такой человек, который в подобных трудностях находит высшее удовольствие. Поэтому нам придется еще возвращаться по разным причинам к обратным действиям.

2. „Температурные кривые" арифметических действий

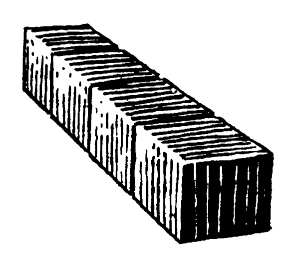
Объем куба

Мы видели, что повторение действий вело нас все дальше в область больших чисел. Насколько далеко? На этом стоит немного задержаться.

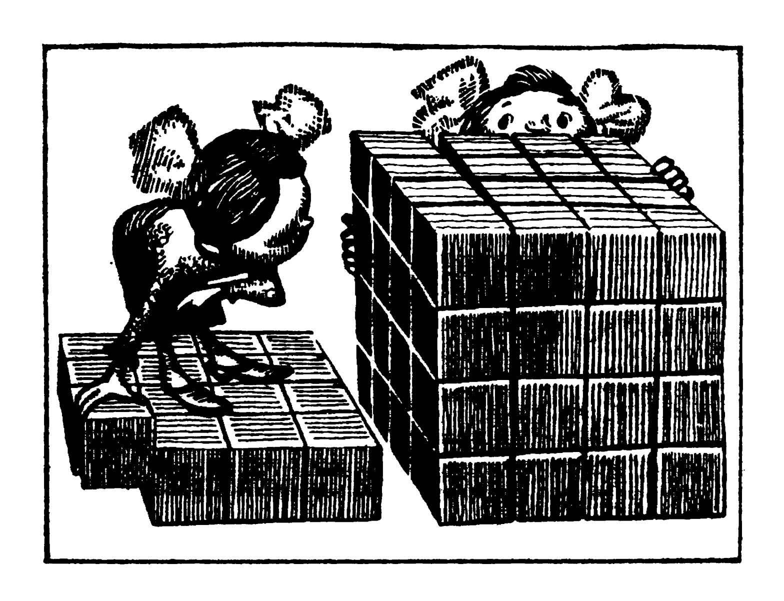
Когда мы хотим, например, подсчитать объем куба, мы должны использовать возведение в степень. Сначала выбираем маленький кубик в качестве единицы и задаемся вопросом: сколько таких маленьких кубиков поместится в измеряемом большом кубе? Пусть единицей будет кубический сантиметр, то есть кубик, у которого и длина, и ширина, и высота равны 1 сантиметру:



Поставим четыре таких маленьких кубика один за другим. Тогда у нас получится такой ряд:



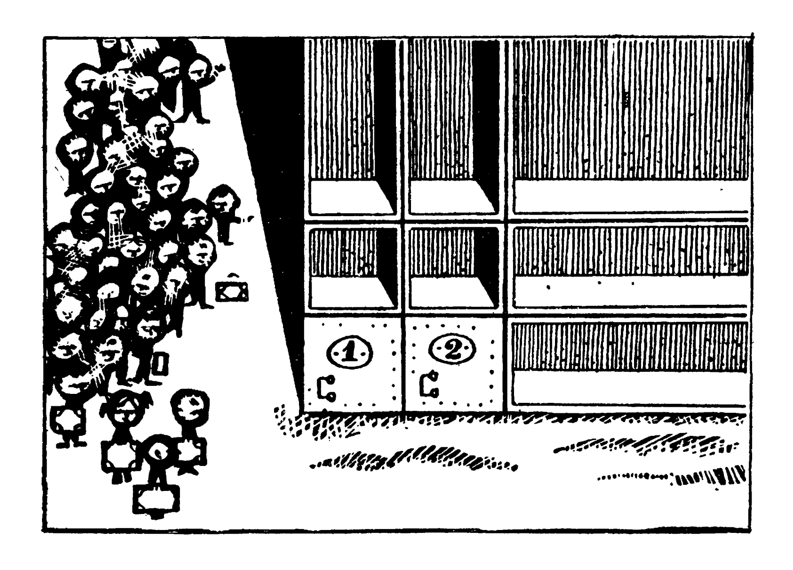
Если теперь мы подставим друг к другу четыре таких ряда, то получим слой, в котором находятся $4 \cdot 4 = 4^2$ кубиков. Поставим, наконец, один на другой четыре таких слоя; тогда мы получим большой куб, который складывается из $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ кубиков.



Таким образом, в кубе, длина, ширина и высота которого равняются 4 сантиметрам, помещается 4^3 кубических сантиметров. В общем случае мы получаем объем куба, возводя длину одной из его сторон в третью степень. Поэтому третью степень и называют также кубом[1]. Следствием этого возведения в степень является тот факт, что куб с относительно короткими ребрами может иметь огромный

[1] Педагоги будут недовольны; мне следовало сказать, что меры объема получают, возводя меры длины в третью степень. Я не хочу, однако, перегружать читателя подобными тонкостями. Здесь пропущено также и нечто более важное — вопрос о том, можно ли ребро любого куба выразить в сантиметрах. К этому вопросу мы еще вернемся.

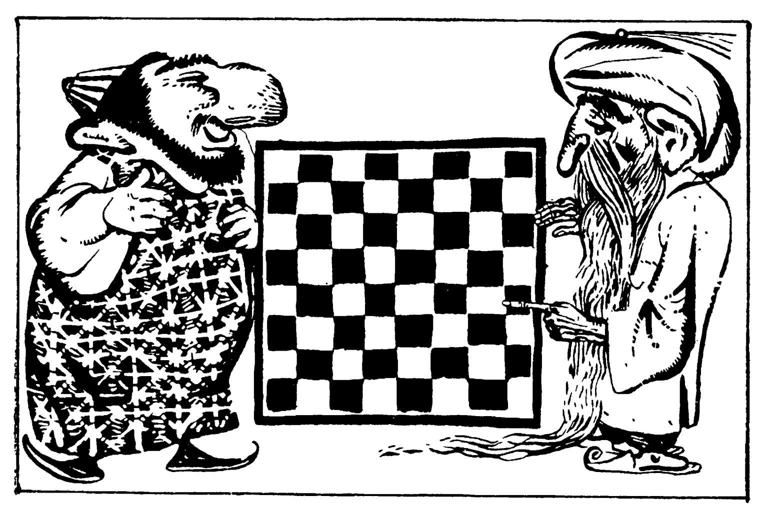
объем. Например, 1 километр не такое уж большое расстояние; каждый может легко его себе представить. Если же мы построим куб, ребром которого будет такая дистанция, то объем этого куба был бы настолько велик, что в нем уместилось бы больше половины населения Земли. Если кто-то сомневается, то может сам посчитать. Допустим, нет людей, рост которых превышает 2 метра. Мы могли бы сделать в нашем кубе настилы на расстоянии 2 метра один от другого; при высоте 1 километр, то есть 1000 метров, мы получили бы 500 этажей. Поделим такие настилы в длину и в ширину на полосы шириной в 1 метр (вид сверху):



Таким образом, на каждой полосе окажется 1000 квадратов, причем таких полос будет насчитываться также 1000. Поэтому на один настил придется $1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000$ квадратов. Длина и ширина каждого квадрата составляют 1 метр, поэтому с уверенностью можно сказать, что на таком квадрате поместятся 4 человека. И таким образом, на одном

этаже можно поместить миллион раз по 4 человека, то есть 4 миллиона человек. В 500 этажей куба войдет, таким образом, 500 раз по 4 миллиона, то есть 2 миллиарда человек.

При подсчете объема куба мы пользуемся только третьей степенью: больший показатель завел бы нас в густые дебри огромных чисел. Очень удивлен был тот владыка, у которого изобретатель шахмат потребовал в награду только «несколько» зерен пшеницы.



Он просил положить на первую клетку своей шахматной доски одно зернышко, на вторую — в два раза больше, то есть два, на третью — снова в два раза больше, то есть $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$, и так далее. Это пожелание кажется на первый взгляд очень скромным. Однако на последующих клетках будут появляться все более высокие степени числа 2, так что в конце концов речь идет о

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$$

зерен (читатель может дописать пропущенные степени, если ему захочется, — у меня на это не хватило терпения). Если бы кто-то захотел подсчитать

количество зерен, то получил бы в результате столько пшеницы, что мог бы покрыть ею весь земной шар слоем почти в 1 сантиметр.

Теперь нас уже не очень удивит, что, многократно повторяя возведение в степень, можно унестись на невообразимые высоты. Лишь одну любопытную подробность хотелось бы мне еще добавить. Можно произвести оценку и убедиться в том, что число 9^{9^9} столь огромно, что для одного только его написания понадобилась бы полоска бумаги длиной в 1800 километров при условии, что каждая цифра имела бы полсантиметра в ширину. Для точного подсчета значения 9^{9^9} не хватило бы человеческой жизни.

Графическое представление функций

Когда я читаю только что написанное, я замечаю, что постоянно говорю: действие «уносит нас на невообразимые высоты», «ведет нас все выше», хотя последовательность чисел является горизонтальной последовательностью:

1, 2, 3, 4, 5, ...

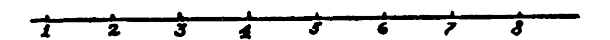
Выражаясь точнее, я должна сказать, что продвигаюсь все дальше вправо или, на худой конец, что иду все вперед и вперед к большим числам.

Использованные мною раньше выражения появились под влиянием чисто эмоциональных факторов. Становиться все больше и больше — это значит расти, а рост связан у нас с представлением о стремлении вверх. Математик придает этой ассоциации конкретную форму; он часто облекает образы своей фантазии в форму рисунка, и бурное возрастание представляется при этом в виде линии, круто взлетающей вверх.

Больные хорошо знают этот рисунок. Они знают, что достаточно посмотреть на кривую их температуры, чтобы получить сведения о ходе всей болезни. Допустим, что в одинаково отстоящие друг от друга моменты времени больному измеряли температуру и при этом были получены такие результаты:

38°; 38°,5; 39°; 38°; 38°,5; 37°; 36°,5.

Можно это представить следующим образом. Сначала последовательные промежутки времени изобразим на горизонтальной прямой в виде отрезков одинаковой длины:

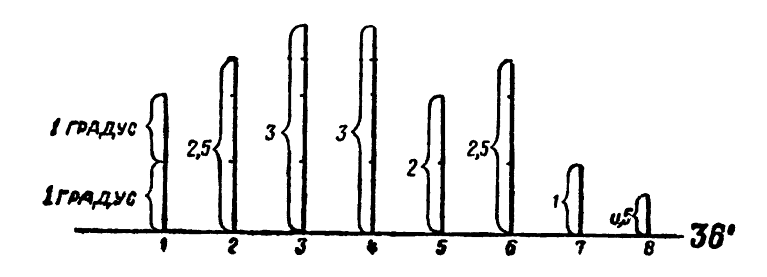


Затем какой-то произвольный отрезок мы обозначаем как один градус и из каждой точки, изображающей данный момент времени, откладываем этот отрезок — в соответствии с ростом температуры — столько раз вверх[1], сколько градусов содержится в величине температуры больного, измеренной в этот момент времени.

Однако нам не нужно рисовать столь длинных линий, ведь температура больного не падала ниже 36°. Поэтому мы можем договориться, что высота горизонтальной линии уже соответствует температуре 36°. А тогда нам нужно отложить на рисунке вверх только

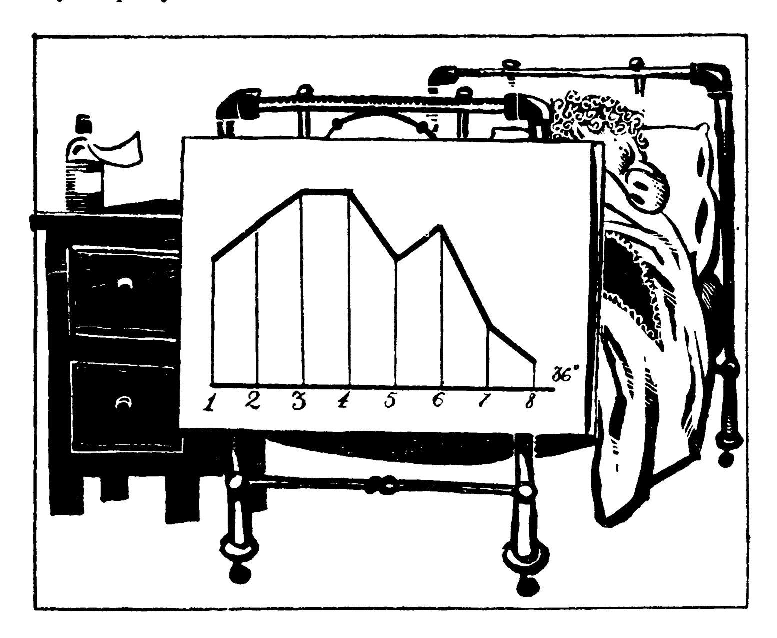
2; 2,5; 3; 2; 2,5; 1; 0,5 градуса.

Мы получаем такой график:



[1] Это «вверх» нужно, конечно, понимать в переносном смысле. На лежащем горизонтально листе бумаги можно рисовать только горизонтальные линии. Несмотря на это, мы говорим, что линия, нарисованная так: I, направлена вверх.

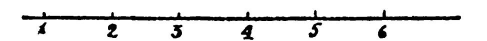
Соединим теперь конечные точки нарисованных отрезков; тогда мы и получим полную температурную кривую:



Эта кривая расскажет все, что нам нужно. Восходящие линии соответствуют росту температуры, нисходящие — ее спаду. Вначале температура равномерно увеличивалась, это видно по тому, как одинаково растут первые два отрезка: оттого концы их и лежат на одной прямой линии. Горизонтальный отрезок соответствует стабилизации в развитии болезни. Несмотря на небольшое увеличение при шестом измерении температуры, выздоровление было быстрым. Спад кривой между шестым и седьмым измерениями температуры чрезвычайно крутой, более крутой, чем какой-либо из восхождений.

Нам ничего не мешает нарисовать такие «температурные» кривые также и для наших арифметических действий.

Общепринято изображать числа на так называемой числовой прямой. На этой прямой выбирают произвольную точку отсчета, обозначаемую символом О, и затем откладывают от этой точки последовательно один за другим равные отрезки:



Тот, кто не хочет утруждать себя счетом, может выполнять действия совершенно механически, пользуясь числовой прямой. Чтобы сосчитать, например, 2+3, достаточно отойти от числа 2 на 3 шага вправо и там тотчас же можно прочесть число 5. Чтобы подсчитать 5—3, нужно сделать от числа 5 три шага влево и так далее. Точно так же в начальной школе дети считают, передвигая костяшки по проволоке счетов.

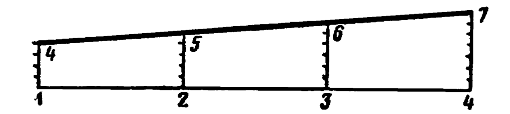
Теперь мы хотим подняться от горизонтальной линии вверх. Отправляясь от какого-либо числа, скажем от 3, вверх, посмотрим, что получится, если прибавлять к этому числу одно за другим числа 1, 2, 3 и так далее; или умножать его последовательно на числа 1, 2, 3 и так далее; или же, наконец, возводить это число последовательно в 1-ю, во 2-ю, в 3-ю и так далее степень? (В самом выражении «возвести в степень», кстати, уже заключена мысль о стремлении вверх.)

Начнем со сложения:

$$3+1=4;$$
$$3+2=5;$$
$$3+3=6;$$
$$3+4=7.$$

Изменяющееся второе слагаемое мы будем отмечать на горизонтальной прямой, а соответствующую ему сумму будем откладывать вверх. Если теперь единицу на горизонтальной прямой мы изобразим при помощи отрезка ————, а в вертикальном направ-

лении — при помощи отрезка I, то получим «температурную кривую» сложения.



Все конечные точки соединенных отрезков лежат здесь на одной прямой. Это значит, что сумма растет равномерно, когда мы увеличиваем одно из слагаемых.

В случае умножения:

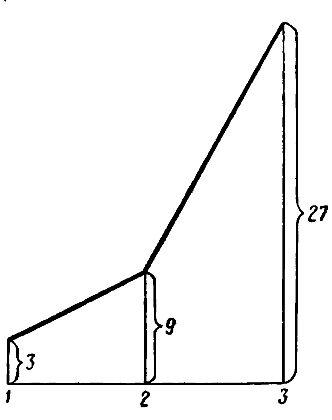
$3 \cdot 1 = 3;$
$3 \cdot 2 = 6;$
$3 \cdot 3 = 9;$
$3 \cdot 4 = 12.$

произведение также растет равномерно, если увеличивается один из сомножителей.

Однако прирост в случае умножения значительно превышает прирост при сложении; вторая прямая много круче первой.

Рассмотрим, наконец, возвышение в степень:

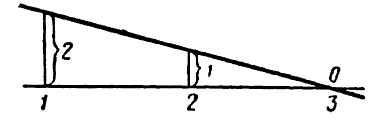
$3^1 = 3;$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9;$
$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27;$
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$



Степень возрастает уже не равномерно, а все более быстро: 3^4 уже не поместится на этой странице. Видимо, здесь нужно искать источник распространенного выражения «увеличить степень воздействия».

Точно так же можно построить «температурные кривые» для обратных действий. «Температурная кривая» для вычитания:

$3 - 1 = 2;$
$3 - 2 = 1;$
$3 - 3 = 0.$



представляет собой нисходящую прямую линию: поэтому разность с постепенным увеличением вычитаемого уменьшается равномерно.

Деление — очень капризное действие. Поэтому к его «температурной кривой» мы вернемся позднее.

Сейчас же не мешает отметить вот что. Только что нарисованные «температурные кривые» математики называют «графическим представлением функций».

При сложении величина суммы зависит от того, как мы выбираем переменное слагаемое; мы говорим, что сумма является функцией переменного слагаемого, изменение этой функции мы представляем графически.

Так же точно произведение является функцией изменяющегося сомножителя. А степень — функцией показателя. И так далее.

Таким образом, уже самые простые арифметические действия приводят нас к функциям. В дальнейшем мы часто будем сталкиваться с такими зависимостями.

Понятие функции — это ядро всей математики.

3. Дробление бесконечной последовательности чисел

Системы счисления

Как далеко мы продвинулись по сравнению с игрой на пальцах! Если мы за это время немного забыли о том, что человек имеет десять пальцев, то лишь потому, что незачем нам было мучиться, делая утомительные подсчеты. Иначе нам давно уже бросилось бы в глаза, что для записи любого сколь угодно большого числа мы пользуемся только десятью разными знаками:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Каким образом каждое из бесконечного множества чисел можно записать с помощью всего лишь десяти знаков? Это оказывается возможным потому, что монотонно тянущуюся в бесконечность последовательность чисел мы можем раздробить, она поддается делению на группы. Отсчитываем десять единиц — такое количество мы еще в состоянии охватить одним взглядом — и связываем эти единицы в один пучок, которому даем новое название. Десять единиц мы называем одним десятком. Точно так же десять однокопеечных монет мы можем обменять на одну десятикопеечную монету. Теперь, считая дальше, мы можем уже делать бо̀льшие шаги. Поскольку в нашем распоряжении уже есть десятки, то ничто не мешает нам соединить вместе десять десятков и образовать таким образом одну сотню. Точно так же десять сотен можно собрать в один букет, называемый тысячей; десять таких букетов — в одну связку, означающую десять тысяч; десять связок, каждая из которых насчитывает по десять тысяч, — в один веник, представляющий собой сто тысяч; десять таких веников, по сто тысяч каждый, сложить в корзину и получить в этой корзине миллион — и так далее, сколько нашей душе будет угодно.

Таким образом, каждое число на самом деле можно записать, пользуясь только десятью написанными выше знаками.

Когда нам нужно перешагнуть девятку, мы можем снова написать единицу, но это будет уже десяток. Следующее число будет складываться из одного десятка и одной единицы, так что мы можем записать его с помощью двух единиц (11). Сначала может показаться, что при записи нам нужны специальные знаки для десятков, сотен и так далее. Однако счастливая мысль сделала это излишним.

Кассир в магазине помещает однокопеечные, двух-, трех-, пяти- и десятикопеечные монеты в разных ящичках своей кассы. Справа — самые мелкие монеты, которые постоянно нужны, чтобы сдавать сдачу; чем левее, тем более крупные монеты лежат в ящичках. Постепенно кассир так привыкает к подобному порядку, что, не глядя, уже знает, какую монету вынимает, например, из третьего ящичка.

Подобное же соглашение мы заключаем, когда пишем единицы, десятки, сотни и так далее. Единицы мы помещаем справа, а затем записываем слева единицы все больших разрядов. Следовательно, слева от единиц располагаются десятки, рядом — на третьем месте — сотни и так далее. При такой записи можно опустить названия единиц: ведь мы можем, исходя из положения цифры, определить ее значение. Итак, цифры наделяются значением в зависимости от их положения. Число

$$354$$

складывается из четырех единиц, пяти десятков и трех сотен. Эта позиционная система записи чисел, в которой мы можем выразить любое число десятью знаками, называется д е с я т и ч н о й с и с т е м о й.

Ничто, однако, не помешало бы нам при дроблении натурального ряда остановиться до или после десяти. Я слышала о первобытных народах, все искусство счисления которых сводится к понятиям «один», «два» и «много». Однако и для них мы могли бы построить систему счисления, разбивая числа на пары. Две единицы дают в этом случае новую единицу — двойку, две двойки дают еще новую единицу — четверку, две четверки — восьмерку и так

далее. В этой двоичной системе для записи любого числа достаточно двух знаков:

0; 1.

Легче всего усмотреть это, если воспользоваться для счета следующими монетами (не страшно, что некоторые из них на самом деле не существуют):

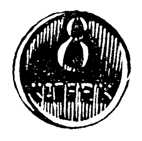


то есть если представить себе единицы двоичной системы как монеты. Каким образом при помощи наименьшего числа монет представить, например, 11 копеек? Легко увидеть, что следующие три монеты



(1)

дают вместе 11 копеек и что одиннадцати копеек нельзя получить при помощи меньшего числа монет. Точно так же

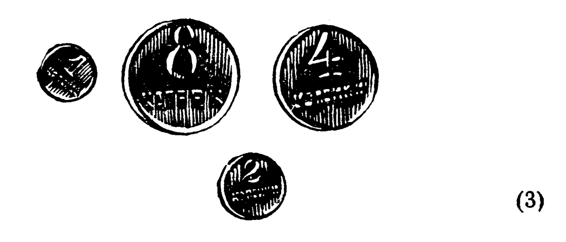


и



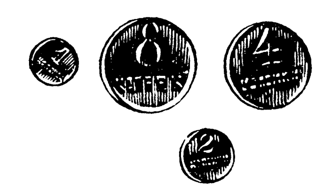
(2)

дают 9 копеек, а



(3)

вместе дают 15 копеек. Я попрошу читателя убедиться самостоятельно в том, что каждое число от 1 до 15 можно составить из



таким путем, что каждая монета используется не более одного раза, то есть 0-кратно или 1-кратно. Число 16 мы не можем получить таким способом. В этом нет ничего удивительного, потому что $16=2\cdot 8$ и 16 — это уже следующая единица. Из примера (1) видно, что число 11 можно в двоичной системе записать как

1011.

Эта последовательность чисел означает в данном случае (справа налево) одну единицу, одну двойку, нулевое количество четверок и одну восьмерку. Действительно, вместе они дают 11. Точно так же из наших примеров (2) и (3) получаем, что 9 и 15 в двоичной системе записываются в виде

1001 и 1111.

Фактически мы обходимся здесь только двумя знаками.

Полезно также попробовать сделать обратный «пересчет»: 11101 в двоичной системе равно: 1 единица + 1 четверка + 1 восьмерка + 1 шестнадцатка = $1+4+8+16=29$ в десятичной системе.

Для чего, собственно, используется та или иная система счисления? Такой порядок в семье чисел сильно облегчает всевозможные вычисления, так как при сложении, например, мы складываем единицы с единицами, десятки с десятками и так далее. Кассир также не подсчитывает вечером свою выручку беспорядочно. Сначала он складывает монеты одинакового достоинства, находящиеся в ящичках его кассы, и лишь затем складывает вместе эти частичные суммы.

Вопрос удобства очень важен и часто оказывается решающим мотивом в развитии математики. Наиболее неудобным действием является деление. Связанные с ним мучения послужили, быть может, первым толчком к подразделению числового ряда. Как мило выглядит деление, которое можно выполнить без остатка! Существуют симпатичные, добропорядочные числа, которые содержат без остатка много других чисел. Таким числом, например, является 60:

$$60 = \begin{cases} 1 \cdot 60 \\ 2 \cdot 30 \\ 3 \cdot 20 \\ 4 \cdot 15 \\ 5 \cdot 12 \\ 6 \cdot 10 \end{cases}$$

Таким образом, числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, и 60 содержатся без остатка в 60.

Если мы хотим теперь поделить какое-нибудь большое число на одно из этих двенадцати чисел (нет, собственно, необходимости относить к ним число 1, которое, к счастью, не влияет ни на произведение, ни на частное), то мы облегчим свою задачу, если вспомним, что делимое (как и всякое другое число) образуется путем отсчета единиц.

Соберем сначала 60 таких единиц, затем еще 60 и так далее, пока не подойдем к нашему числу настолько близко, насколько это возможно. Деление шестидесяток не представляет собой ничего трудного. В остатке же у нас может быть самое боль-

шее 59, то есть небольшое число; можно рискнуть его разделить, даже если при этом остается какой-то остаток.

Исходя из этого следует объединять числа в группы по 60. И древние, которые занимались решением астрономических задач, требовавших многократного использования операции деления, так и сделали — они ввели шестидесятеричную систему для измерения углов и времени. До сего дня $6 \cdot 60 = 360$-я часть полной окружности называется градусом. Один градус содержит 60 минут; в одной минуте — 60 секунд. Таково же и деление часа на минуты и секунды.

Однако же 60 не такое уж маленькое число, и пользоваться им не слишком удобно. Среди чисел, близких к 10, наибольшее число делителей имеет 12:

$$12 = \begin{cases} 1 \cdot 12 \\ 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 \end{cases}$$

1, 2, 3, 4, 6, 12 — всего шесть делителей, тогда как 10 делится только на четыре числа: 1, 2, 5, 10. Мы наталкиваемся также на следы использования двенадцатеричной системы. Например, год складывается из 12 месяцев, дюжина — из 12 штук. Десятичная система, однако, одержала полную победу — это свидетельствует о том, что на человека большее влияние оказала игра на пальцах, нежели соображения целесообразности.

Французы напоминают нам, что люди когда-то играли также пальцами ног. Кто же еще, как не человек, привыкший к двадцатеричной системе, мог назвать восемьдесят «четыре раза двадцать» (quatre-vingt)?

Правила делимости

Остановимся на десятичной системе и посмотрим, как она ведет себя при делении.

Прежде всего система эта полезна тогда, когда мы хотим делить на один из делителей десяти —

на 2, 5 или же на 10. Эти числа содержатся в 10 без остатка. Однако это значит, что они содержатся без остатка также в $2 \cdot 10 = 20$, в $3 \cdot 10 = 30$ и вообще в любом количестве десятков. А это относится и к $10 \cdot 10 = 100$, следовательно, и к $2 \cdot 100 = 200$, $3 \cdot 100 = 300$ — короче говоря, к любому количеству сотен, тысяч и так далее. Видно, что на 2, 5 и 10 делятся без остатка десятки, сотни, тысячи и так далее.

Остается еще выяснить, делятся ли на эти числа также и единицы. Прежде всего 10 больше всякого числа от 1 до 9. Значит, если в каком-то числе на месте единиц стоит число, отличное от 0, то это число не может делиться на 10. На 10 делятся только те числа, в которых нет единиц. Отсутствующие единицы замещает цифра 0, и, следовательно, мы получаем известное свойство деления:

на 10 делятся только те числа, которые оканчиваются на 0. Единственное число из разряда единиц, которое делится на 5, — это само число 5, и мы получаем правило:

на 5 делятся только те числа, которые оканчиваются на 5 и на 0. Наконец, на два в разряде единиц делятся 2, 4, 6, 8. Поэтому

на 2 делятся те числа, которые оканчиваются на 0, 2, 4, 6 и 8. Мы называем их четными числами.

Итак, мы исчерпали все делители 10; однако всех возможностей десятичной системы мы еще не исчерпали. Следующей единицей в этой системе является число 100. Легко можно отыскать также все делители 100. Например, 4 не содержится в 10 целое число раз без остатка, однако в 100 содержится, потому что $4 \cdot 25 = 100$. Поэтому 4 укладывается без остатка также и в $2 \cdot 100 = 200$ и вообще во всех сотнях; это же можно сказать — поскольку $10 \cdot 100 = 1000$ — и обо всех тысячах и т. д. Однако мы не знаем заранее, делятся ли на 4 без остатка десятки и единицы. Чтобы выяснить это, достаточно, какое бы большое число нам ни было дано, прове-

рить, делятся ли на 4 две последние цифры. Например, число

3 478 524

делится на 4, так как 24 делится на 4. В этом можно убедиться, бросив один лишь беглый взгляд, так как на остальные пять цифр, которыми начинается число, вовсе не нужно обращать внимания. Точно так же сразу можно увидеть, что число

312 486 434

не делится на 4, потому что 4 не укладывается без остатка в числе 34.

Перейдем от делителей числа 100 к делителям числа 1000. Например, число 8 не является делителем 100, так как оно делитель восьмидесяти, а в остающемся числе 20 уже не укладывается без остатка. Однако оно является делителем 1000, потому что 1000 можно разложить на сумму 800+160+40, и в каждом слагаемом 8 укладывается без остатка. Поэтому на 8 делятся без остатка все тысячи, десятки тысяч, сотни тысяч и так далее, и чтобы выяснить, делится ли какое-то число на 8, достаточно исследовать три последние цифры этого числа.

Мы получили, таким образом, метод, который позволяет нам быстро выяснить, делится ли какое-то число на некоторое другое выбранное нами число.

Мы должны только узнать, делится ли на выбранное число без остатка число 10. Если да, то уже последняя цифра позволяет решить вопрос о делимости. Если же данное число не укладывается без остатка в 10, то мы должны идти дальше и посмотреть, укладывается ли наше число без остатка в 100, 1000, 10 000, и затем в зависимости от результата мы должны взять большое число цифр, чтобы решить вопрос о делимости.

Очевидно, существуют числа, на которые не делятся ни 10, ни 100, ни 1000, ни какая-либо другая бо̀льшая степень десяти. Легко увидеть, что большинство

чисел именно так и ведет себя. Однако и для таких чисел наши рассуждения позволяют установить какие-то правила. Легче всего сделать это в случае делимости на 9:

$$10=9+1; \quad 100=99+1; \quad 1000=999+1 \ ...$$

Как видно, 9 не может быть делителем ни 10, ни 100, ни 1000. Когда мы пытаемся делить одно из этих чисел на 9, всегда получается остаток 1. Однако именно тот факт, что остатком всегда является число 1, и приводит нас к простому признаку делимости: когда мы делим 10 на 9, остаток равен 1; когда делим 20 — получаем остаток 2; когда делим 30 — остаток равен 3. Вообще когда мы делим какое-то количество десятков на 9, то остаток равен числу этих десятков.

То же самое происходит при делении сотен на 9. Когда мы делим 100 на 9, остаток равен 1; когда делим 200 на 9 — остаток равен 2. Выходит, при делении сотен на 9 остаток в точности равен числу сотен, которые мы делим. То же самое можно сказать о тысячах и так далее. Напрашивается вывод, если мы хотим выяснить, делится ли какое-то число на 9, то наиболее целесообразно разложить это число на единицы, десятки, сотни и так далее. Например, 234 = 2 сотни + 3 десятка + 4 единицы. При делении на 9 две сотни дадут остаток 2; три десятка — остаток 3 и четыре единицы — остаток 4. В общем получается остаток $2+3+4$. Но

$$2+3+4=9.$$

Эта сумма делится на 9. Остатки вместе дают число, делящееся на 9, поэтому число 234 также делится на 9. Отсюда получаем искомое правило:

данное число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Сумма цифр числа, состоящего из большого числа цифр, значительно меньше самого этого числа. Благодаря этому наше правило позволяет сразу вы-

яснить, делится ли данное число на 9. Рассмотрим, например, число

2 304 576.

Сумма цифр дает нам:

$$2+3+4+5+7+6=27.$$

Тот, кто знает таблицу умножения, сразу вспомнит, что 27 делится на 9.

Число же

2 304 577

не делится на 9, потому что

$$2+3+4+5+7+7=28$$

не делится на 9.

Занимаясь рассуждениями, мы кружились возле существенных трудностей деления, не задевая этих трудностей. Однако уже это кружение оказалось плодотворным; на каждом шагу мы наталкивались на неожиданные зависимости.

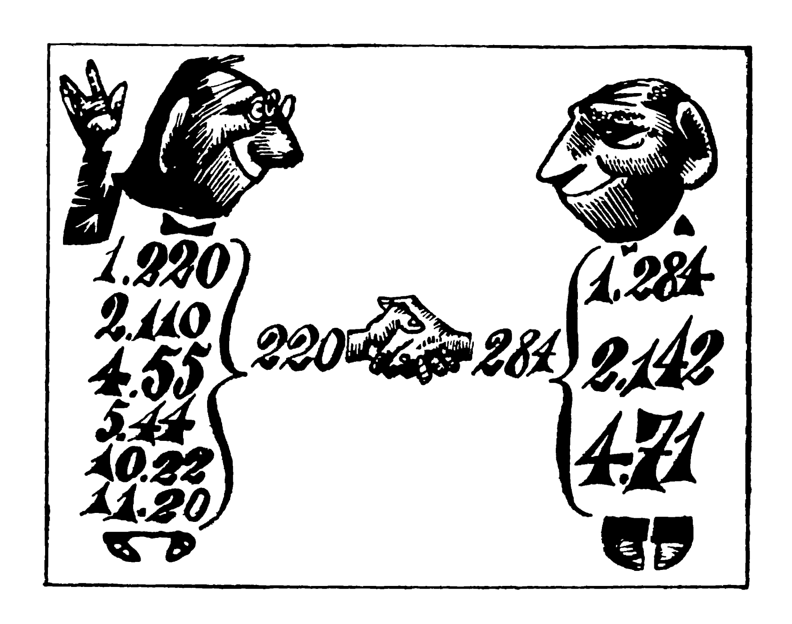
Позже мы решимся даже наглядно представить всякое деление, которое нельзя выполнить без остатка. Это откроет нам путь к самым смелым понятиям математики.

4. Ученик чародея

Понятие делимости таит в себе много интересного, поэтому полезно еще немного поразвлечься фокусами с делением. Например, нас должно позабавить, что существуют дружественные числа.

Два числа являются *дружественными* или *содружественными*, когда сумма собственных делителей одного числа равна другому числу, и наоборот. Само число мы не относим к его собственным делителям (например, собственными делителями числа 10 суть 1, 2 и 5). Такими дружественны-

ми числами являются, например, 220 и 284, потому что



Сумма собственных делителей числа 220 равна:

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284,$$

а сумма собственных делителей числа 284 равна:

$$1+2+4+71+142=220.$$

Существуют даже такие числа, которые сами равны сумме своих собственных делителей. Они называются **совершенными** числами. Таким числом, например, является число 6: его собственные делители — это числа 1, 2 и 3, и в то же время

$$1+2+3=6.$$

В древности таким числам приписывали магические свойства и поэтому старательно отыскивали совершенные числа. Найдено много таких чисел.

Среди них лучше всего поддается проверке число 28:

$$28=\begin{cases}1\cdot 28\\ 2\cdot 14\\ 4\cdot 7\end{cases}$$

$$1+2+4+7+14=28.$$

Остальные числа уже намного больше. Все известные совершенные числа — четные. Существует даже рецепт, который позволяет получать четные совершенные числа, однако мы и по сей день не знаем, доставляет ли этот рецепт сколь угодно большое количество совершенных чисел. Нечетных совершенных чисел пока не обнаружено; существуют ли они вообще — проблема, которая ждет еще своего решения.

Итак, к чему же мы пришли? Человек создал для своих нужд натуральный ряд чисел; этот ряд — творение человека и служит человеку для счета и для выполнения арифметических действий, вытекающих из счета. Однако, создав этот ряд чисел, человек утратил затем какую бы то ни было власть над ним. Натуральный ряд зажил самостоятельной жизнью, так что изменить в нем ничего нельзя. Он ведет себя по своим собственным законам, которых и во сне не видали люди, создавая числа. Ученик чародея стоит как вкопанный перед вызванными им чародейными силами. Человек творит новый мир, но затем самого человека начинают осаждать тайны, неожиданные закономерности этого мира. И тогда человек перестает быть только творцом и становится исследователем; он изучает зависимости и проникает в тайны мира, который сам же вызвал к жизни.

Арифметическая прогрессия

Исследование и выглядит столь привлекательно оттого, что, по сути дела, не требует никаких хитрых приспособлений, кроме пары внимательных глаз. Моя десятилетняя ученица пришла ко мне както со следующим вопросом:

— Я давно заметила, что если последовательно складывать числа, останавливаясь на каком-нибудь нечетном числе, то получается такое же число в ответе, какое можно было бы получить, умножая последнее число на «серединку». Например, серединкой числа 7 будет число 4 (то есть между числами 1 и 7 число находится посредине: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) и $7 \cdot 4 = 28$, а в то же время сумма первых семи чисел

$$1+2+3+4+5+6+7$$

также равна 28. Я знаю, что так бывает всегда, только не знаю, почему это так.

«Естественно, это же арифметическая прогрессия,—подумала я.—Но как объяснить это десятилетней девочке?» Тогда я обратилась к детям в классе:

— У Веры есть очень интересная задача!

И едва я кончила объяснять, в чем дело, как самая сообразительная девочка в классе вскочила так быстро, что едва не свалилась из-за парты.



— Только не скажи, Ева, какую-нибудь глупость; ты не могла так быстро понять это,— сказала я.

И однако бурная реакция Евы была не напрасна.

— Вера помножала 7 на 4. Это значит

$$4+4+4+4+4+4+4.$$

Вера взяла эту сумму вместо

$$1+2+3+4+5+6+7.$$

Значит, вместо 1 она взяла 4, а это на 3 больше. Но вместо 7 Вера взяла тоже 4, а это на 3 меньше, и, таким образом, обе разницы уравнялись. Точно так же 4 на 2 больше двух, но и на 2 меньше 6, и здесь разница тоже уравнивается. И то же самое получается с четверками, которые мы заменяем на 3 и 5. Поэтому обе суммы и оказались одинаковыми.

Я должна была отдать Еве должное: самой бы мне никогда не дойти до такого ловкого объяснения.

Как часто такие непредубежденные маленькие исследователи делают наблюдения, заслуживающие самого серьезного внимания!

— Это как в тетрадке! — крикнула другая моя ученица, маленькая Мария.

— Что ты хочешь сказать?

— В нашей задаче первое слагаемое сравнивается с последним, а потом второе — с предпоследним. Так ведь и в тетрадке листки соединены так же: первый с последним, второй с предпоследним.

Моих учениц подталкивала чистая любознательность; Гаусс, этот «князь математиков», будучи маленьким учеником, обнаружил эту зависимость, побуждаемый требованиями практики. Рассказывают, что учитель Гаусса, желая выкроить себе во время урока минуту отдыха, дал ученикам на редкость нудное задание — заставил их просуммировать все числа от 1 до 100. Однако надежды учителя на несколько минут покоя оказались тщетны: очень скоро маленький Гаусс воскликнул:

— Ответ — 5050!

Учитель должен был признать ответ правильным. Каким же образом Гаусс так быстро отыскал результат?

— Я заметил, что

$$1+100=101;$$
$$2+99=101;$$
$$3+98=101.$$

Слагаемые надо было 50 раз брать по одному из начала и с конца последовательности чисел, а $50 \cdot 101$ равняется 5050.

Маленький Гаусс складывал последовательно числа, причем последнее число было четным, и пользовался при этом тем же методом, что и моя ученица Вера, которая подсчитывала сумму всех чисел вплоть до какого-то нечетного числа. Если мы немного усложним ход рассуждений, то можно объединить оба способа. Есть старый анекдот о человеке, который бросил взгляд на пастбище и уверенно заявил: «На этом лугу 357 баранов». На вопрос, как он это узнал, он ответил: «Очень просто — я посчитал все ноги и результат поделил на четыре». Математик не раз поступает именно так. Когда речь идет, например, о сложении всех чисел вплоть до какого-то данного числа, то без труда можно отыскать число, в два раза большее нужной нам суммы. Нужно только сначала прибавить первое число к последнему, потом — второе к предпоследнему и так далее. Для этого чи́сла, которые мы должны сложить, нужно выписать дважды в двух строчках; причем во второй строке изменить порядок следования чисел. Например,

$$\begin{matrix}1+2+3+4\\4+3+2+1\end{matrix} \quad \text{или же} \quad \begin{matrix}1+2+3+4+5\\5+4+3+2+1.\end{matrix}$$

При такой записи слагаемые, которые мы хотим прибавить друг к другу, сразу находятся одно под другим. Сложим находящиеся одно под другим числа. Получаем

$$\begin{matrix}5+5+5+5=\\=4\cdot 5=20\end{matrix} \quad \text{или же, соответственно,} \quad \begin{matrix}6+6+6+6+6=\\=5\cdot 6=30.\end{matrix}$$

Это искомая сумма, взятая дважды. Результат равен 10 или 15; в самом деле,

$$1+2+3+4=10; \text{ или же } 1+2+3+4+5=15.$$

Как видим, это правило годится для обоих случаев: сумму первого (1) и последнего (4) чисел нужно умножить на число слагаемых $(1+4)\cdot 4$; $5\cdot 4=20$ и полученный результат поделить пополам: ($\frac{20}{2}=10$). Это правило содержит в себе как результат Веры, так и метод Гаусса. Когда мы складываем $1+2+3+4+5+6+7$, сумма первого и последнего чисел равна 8; умножение этой суммы на число слагаемых дает $7\cdot 8=56$, и половина этого результата равна 28. В задаче $1+2+ \dots +100$ сумма первого и последнего чисел равна 101; если мы умножим это число на 100, то получим 10100; половина этого числа равна 5050.

Ясно, — мой класс заметил это тотчас же, — что такое правило дает нам возможность подсчитывать сумму не только последовательно расположенных друг за другом чисел, но и вообще сумму чисел, которые отстоят одинаково друг от друга. Например, описанный метод можно применить к сумме:

$5+7+9+11+13$ (первое число совершенно произвольное),

в которой каждое следующее слагаемое на два больше предыдущего, или же к сумме:

$$10+15+20+25+30+35,$$

в которой разница между двумя соседними слагаемыми всегда равняется 5. Здесь также сумма первого и последнего слагаемых всегда равна сумме второго и предпоследнего и так далее. Читатель может убедиться в этом: в первом примере

$$5+13=18; \qquad 7+11=18;$$

и $9+9$ — сумма двух «середок» — также равна 18. Во втором примере

$$10+35=45; \qquad 15+30=45; \qquad 20+25=45.$$

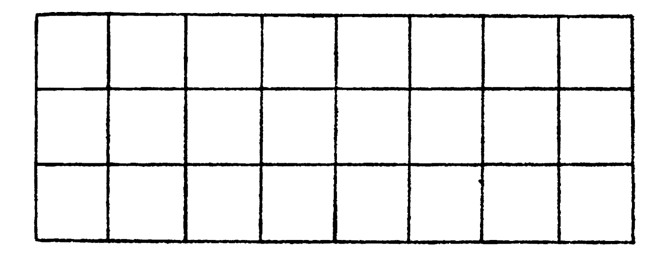
Такие последовательности, в которых числа держатся друг от друга на одинаковых расстояниях, математики называют *арифметическими прогрессиями*.

Площадь прямоугольника и площадь треугольника

Интересно то, что одна и та же мысль появилась в разных областях математики. Тот же самый прием, который сослужил свою службу при отыскании суммы арифметической прогрессии, оказывается полезным, например, при отыскании площадей. Площадь прямоугольника можно отыскать легко: мы берем в качестве единицы маленький квадратик и выясняем, сколько нужно таких единиц, чтобы покрыть весь прямоугольник. Пусть единицей будет квадратный сантиметр, то есть квадратик, длина и ширина которого равны 1 сантиметру:

Уложим подряд восемь таких квадратиков:

Мы получим прямоугольник. Поскольку он очень узкий, приставим друг к другу три таких прямоугольника:

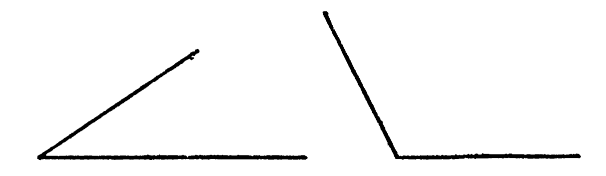


Полученный прямоугольник складывается из $3 \cdot 8 = 24$ квадратиков. Если бы у нас сразу был прямоугольник, имеющий 3 сантиметра длины и 8 ширины, то мы могли бы сказать, что в нем умещается как раз $3 \cdot 8 = 24$ квадратика. Таким образом, общее правило гласит: площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон [1].

Говоря о прямоугольнике, отметим еще, что две его соседние стороны образуют прямой угол (можно также сказать, что две стороны прямоугольника взаимно перпендикулярны). Прямой угол образуют, например, стены дома, и при строительстве нужно очень внимательно следить, чтобы это требование выполнялось:



Одна сторона и не склоняется к другой стороне и не отклоняется от нее, как это имеет место, например, в случае тупого или острого углов:

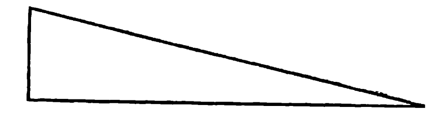


(Стены, образующие такие углы, легко могут рухнуть.) Обе стороны прямого угла сохраняют полное устойчивое равновесие.

---

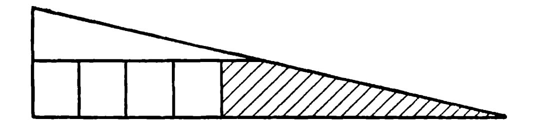
[1] К случаю, когда 1 не укладывается определенное число раз на сторонах прямоугольника, мы еще вернемся.

В фигуре, ограниченной тремя прямыми, то есть в треугольнике, также может быть прямой угол, притом только один. Попробуйте опровергнуть это, и сколько бы вы ни трудились, два угла в треугольнике все равно окажутся острыми:



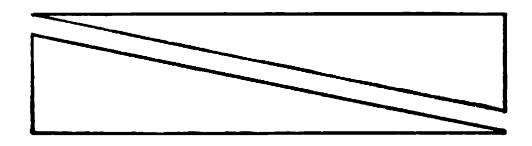
Те стороны треугольника, которые образуют прямой угол, мы называем катетами. Сторона, лежащая напротив прямого угла, носит название гипотенузы.

Поскольку в треугольнике есть острые углы, то такой прямоугольный треугольник нельзя покрыть нашими квадратиками — единицами площади:



Уже в нижнем ряду остается непокрытым заштрихованный «хвост». Поэтому здесь подсчет площади оказывается куда более трудной задачей.

И все же проблему, возникающую таким образом, удается разрешить очень легко: поскольку мы не можем покрыть квадратиками площадь о д н о г о треугольника, покроем ими площадь д в у х треугольников. Положим два прямоугольных треугольника один на другой так, чтобы их гипотенузы слились. Получаем прямоугольник:

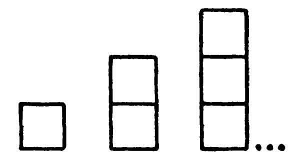


Площадь этой фигуры мы уже научились отыскивать: нужно только перемножить две соседние стороны прямоугольника. Но эти соседние стороны не что иное, как катеты нашего прямоугольного треугольника. Получив удвоенную площадь треугольника и поделив этот результат пополам, мы получим площадь одного треугольника. И таким образом, площадь прямоугольного треугольника мы получаем, перемножая длины катетов и затем деля пополам полученное произведение.

Аналогия с суммированием арифметической прогрессии станет совсем очевидной, если мы последуем за Евклидом, который две тысячи лет назад подарил миру знаменитый, поразительно совершенный математический трактат. Евклид представил геометрически все понятия арифметики. Вместо последовательности чисел:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots$$

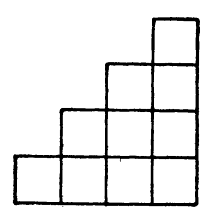
он рассматривал последовательность фигур:



Поэтому сумма

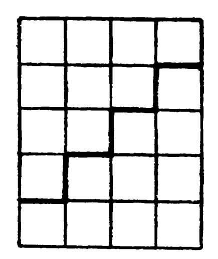
$$1+2+3+4$$

имела у него вид такого ступенчатого треугольника:



Прием, основанный на выписывании суммы в обратной последовательности под первоначальной сум-

мой (или над этой суммой), можно нарисовать, надстроив над таким треугольником другой такой же ступенчатый треугольник:



Таким образом, 4 находится над 1; 3 — над 2; 2 — над 3 и 1 — над 4. В каждой колонке всегда будет 5 квадратиков, и поэтому всего их будет $5 \cdot 4 = 20$; это полностью соответствует тому факту, что полученный прямоугольник имеет четыре единицы длины и пять единиц высоты, поэтому его площадь содержит $4 \cdot 5$ «поверхностных» единиц. Это удвоенная искомая сумма. Нужная же нам сумма в два раза меньше, и площадь ступенчатого треугольника в два раза меньше площади прямоугольника. Это особенно ясно показывает, как можно одну и ту же мысль выразить один раз арифметически, другой раз геометрически.

Мы еще не однажды столкнемся с этой идеей и не однажды воспользуемся ею.

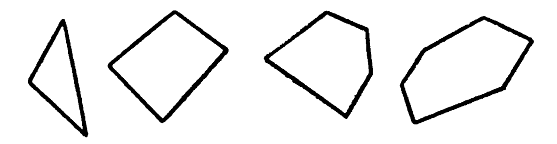
5. Вариации на главную тему

Диагонали выпуклых многоугольников

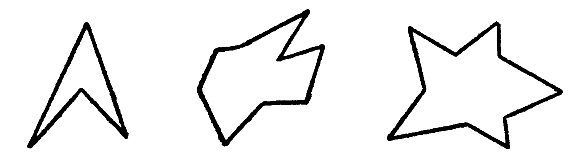
Когда может появиться необходимость последовательно суммировать числа, начиная с 1? К этому может привести нас и такая, казалось бы, совсем далекая проблема.

Мы уже рассмотрели треугольники и четырехугольники. Вообще мы называем фигуры, ограни-

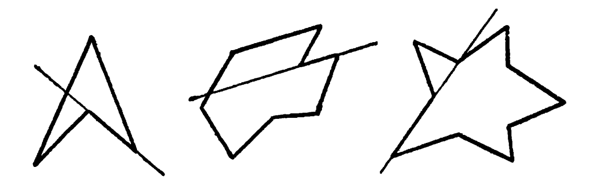
ченные отрезками прямых линий, многоугольниками:



Нарисованные здесь многоугольники относятся к так называемым выпуклым многоугольникам. Нигде нет у них никаких углублений, таких, например, как у следующих многоугольников:



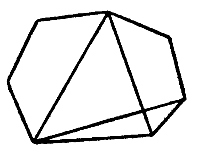
Говоря точнее, первая группа нарисованных нами многоугольников отличается от второй тем, что многоугольники второй группы пересекаются продолжениями некоторых своих сторон, а многоугольники первой группы — нет:



Попытайтесь сами, и вы убедитесь, что с многоугольниками первой группы такого проделать нельзя. Вообще-то говоря, разницу эту нам следовало твердо установить с самого начала. Впредь мы будем говорить только о выпуклых многоугольниках.

(Такое разграничение имеет место также и для пространственных геометрических тел.)

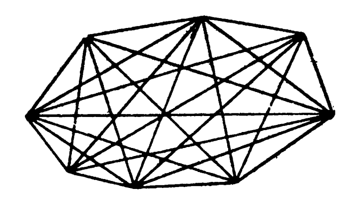
Отрезок, соединяющий две вершины многоугольника, не принадлежащие одной его стороне, называется диагональю (вершины, принадлежащие одной стороне многоугольника, соединяются самими сторонами). Нарисуем несколько диагоналей многоугольника:



Задача, которой мы теперь займемся, такова: сколько диагоналей можно провести в данном многоугольнике, скажем, восьмиугольнике.

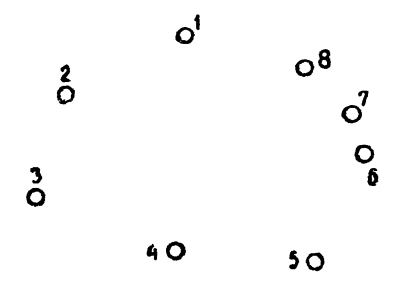
Существуют две возможности.

Если даже мы нарисуем все диагонали, то подсчитать их будет не так уж легко — слишком густо покрывают они многоугольник:



Задача облегчается, если мы не будем проводить разницы между «соседними» и «не соседними» вершинами, иначе говоря, если мы сначала стороны отнесем к числу диагоналей многоугольника. Ведь мы знаем, что число этих сторон — восемь, и в нашей власти, получив результат, вычесть из него эту восьмерку.

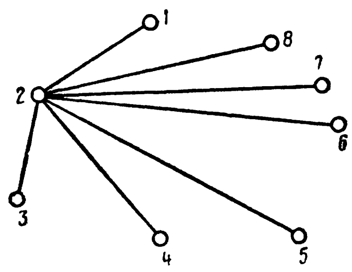
Теперь задача имеет такой вид. У нас есть восемь вершин восьмиугольника:



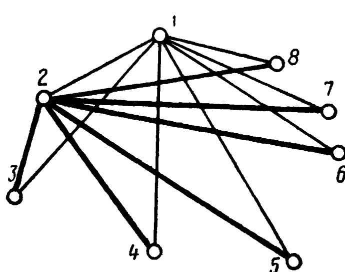
Сколькими способами можно соединить между собой эти точки?

Существуют две возможности.

Во-первых, мы можем соединить точку 1 с остальными семью точками и получить таким образом семь отрезков:



Затем соединяем точку 2 с остальными точками (кроме точки 1, которая уже была соединена с точкой 2 на первом шаге); таким образом, к нашим 7 отрезкам, полученным на первом шаге, добавляется еще 6 отрезков:



Соединим теперь точку 3 с остальными точками (кроме точек 1 и 2, которые уже в счет не идут); таким образом, мы получаем 5 новых отрезков. Точно так же, связывая точку 4 с четырьмя остальными точками, еще «не охваченными», мы получаем 4 отрезка. Из точки 5 мы проводим 3; из точки 6 — 2 и из точки 7 — всего 1 отрезок. Точка 8 соединена у нас уже со всеми остальными точками и потому не дает нам никакого нового отрезка. В итоге получается

$$7+6+5+4+3+2+1,$$

или же, записывая в обратном порядке:

$$1+2+3+4+5+6+7$$

отрезков.

Другой способ соединения этих отрезков основывается на том, что мы выясняем, какое количество отрезков можно провести из данной вершины независимо от других вершин. Очевидно, число таких отрезков семь: каждую вершину мы можем соединить с семью остальными вершинами.

Мы могли бы теперь прийти к ошибочному выводу, решив, что поскольку из одной вершины можно провести семь отрезков, то для восьми вершин всего получится $7 \cdot 8 = 56$ таких линий. Это, однако, неверно, потому что отрезок соединяет две вершины. Поэтому, например, вершины 1 и 6 мы соединяем дважды: первый раз — рассматривая все отрезки, выходящие из точки 1; второй раз — рассматривая отрезки, выходящие из точки 6. Поэтому наша ошибка состоит только в том, что мы считаем каждый отрезок дважды. Настоящий ответ будет равен половине произведения $8 \cdot 7 = 56$, то есть 28.

Оба способа должны привести нас к одному и тому же результату, и поэтому сумма

$$1+2+3+4+5+6+7$$

равняется половине произведения $8 \cdot 7$. Однако это не что иное, как снова выплывший результат, поразивший мою ученицу Веру.

Комбинации из двух элементов

Возможны дальнейшие вариации на нашу основную тему. Можно иначе сформулировать поставленную здесь задачу. Поскольку каждый отрезок соединяет две вершины, постольку мы вправе поставить такой вопрос: сколько существует различных способов выбора из восьми вершин двух вершин? При этом отнюдь не обязательно, чтобы это были вершины многоугольника.

Можно было бы задать также и такой вопрос: сколькими способами можно вынуть два шарика из мешочка, в котором лежит восемь разноцветных шариков?

Или же: сколькими способами можно выбрать первую пару из восьми детей, которых мы хотим построить парами?

Все эти вопросы математики в общем виде формулируют так: сколько комбинаций по два элемента можно составить из восьми элементов?

Если мы обозначим элементы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то их комбинации по два элемента (короче говоря, пары) будут такими:

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6	6 7	7 8
1 3	2 4	3 5	4 6	5 7	6 8	
1 4	2 5	3 6	4 7	5 8		
1 5	2 6	3 7	4 8			
1 6	2 7	3 8				
1 7	2 8					
1 8						

При такой записи отчетливо видно, что число комбинаций (считая справа налево) равно:

$$1+2+3+4+5+6+7.$$

Здесь также существует второй способ решения задачи — исходя из того, что каждый элемент можно объединить в паре с любым из остальных семи элементов. 8 элементов дают, таким образом, $8 \cdot 7$ пар. Однако при этом мы считаем каждую пару

дважды, потому что каждый раз мы отдельно считаем соединение первого и второго и второго и первого элементов каждой пары. Поэтому окончательный результат снова будет равен половине произведения $8 \cdot 7$.

Формулы

Хотя мы и принимаем в качестве исходного пункта самые разные вещи, все пути приводят нас всегда к одному и тому же конечному результату. И я не могу устоять перед искушением придать этому результату вид формулы. Но прежде всего я хотела бы обратить ваше внимание вот на что. Скобки в математике не означают, что мы хотим вспомнить что-то вскользь по ходу дела, как это бывает в обычной речи. Математик часто заключает в скобки то, что следует рассматривать во взаимосвязи. Так, например, $(2+3) \cdot 6$ означает, что результат сложения $2+3$, то есть 5, мы умножаем на 6, в то время как без скобок $2+3 \cdot 6$ означает, что к числу 2 следует прибавить результат умножения $3 \cdot 6$ (существует договоренность, что умножение связывает «сильнее» сложения, поэтому писать $2+(3 \cdot 6)$ нет необходимости). Каждый знает, что половины чисел 4, 6 и 10 можно записать виде $\frac{4}{2}$; $\frac{6}{2}$ и $\frac{10}{2}$; деление также можно предоставить в виде такой «дроби».

Обозначим теперь число, которым кончается у нас сумма всех чисел, начиная с 1, буквой n. Сумма первого и последнего слагаемых равна $1+n$. Эту сумму нужно помножить на число слагаемых, то есть на n, а затем произведение это поделить на 2. Таким образом, все вариации на нашу основную тему удается выразить при помощи такой формулы:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{(1+n)}{2} \cdot n.$$

Математика, собственно, представляет собой язык, особый язык, пользующийся одними лишь символами. Написанная нами только что формула —

всего лишь какой-то символ, не имеющий строго определенного содержания. Каждый может придать этой формуле тот смысл, какой ему заблагорассудится. Для одних это будет подсчет числа диагоналей многоугольника, для другого — отыскание количества способов, которыми можно образовать ведущую пару учеников. Написанная же формула — это, если хотите, выражение нашей радости по поводу того, что все такого рода задачи удается решить при помощи одной и той же мысли.

Добавление о геометрии без размера

В наших предыдущих рассуждениях звучали два мотива — геометрический и арифметический. Послушаем еще немного геометрический мотив.

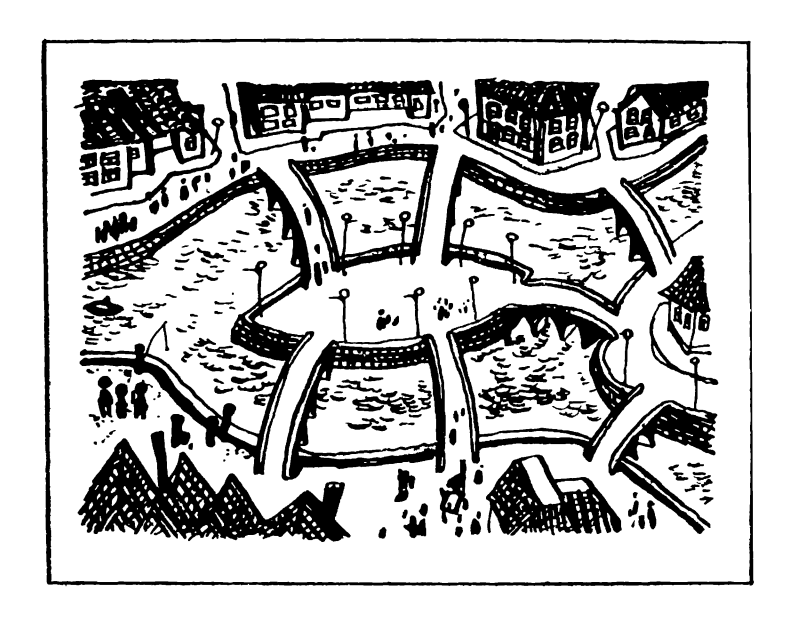
Взгляните снова на рисунок, изображающий восьмиугольник со всеми его диагоналями. Рисунок этот очень запутанный, потому что диагонали скрещиваются и пересекаются и от точек пересечения попросту в глазах рябит. Хорошо еще, однако, что мы имеем дело с выпуклым многоугольником; благодаря этому все его вершины лежат вовне и по крайней мере не смешиваются с точками пересечения. Мы бы получили куда более четкий рисунок, если бы диагонали имели вид прикрепленных к вершинам резинок, которые можно подымать вверх. Ухватившни одну диагональ, мы могли бы вторую поднять выше ее, третью — еще выше и так далее — так, чтобы они не пересекались. Тогда их можно было бы легко подсчитать, потому что число диагоналей не менялось бы при растягивании диагоналей.

Топология

Существует особая область геометрии, изучающая такие свойства фигур, которые не меняются тогда, когда мы, изготовив фигуры из резины, будем их как угодно сжимать или растягивать. Называется она

топологией. Любопытно, что наука эта также геометрическая, хотя об измерении здесь не может быть и речи: ведь при растяжении и сжатии меняются и линейные размеры и величины углов. Для нас особое значение имеет то, что топология возникла сравнительно недавно, и мы знаем источник, из которого она появилась. Мы можем своими глазами проследить, как из какой-то игры возникает целая отрасль математики.

Игра эта имела вид загадки и относилась к мостам Кенигсберга (нынешнего Калининграда). Два острова на реке Прегеле в Калининграде были связаны друг с другом и с берегами при помощи семи мостов:

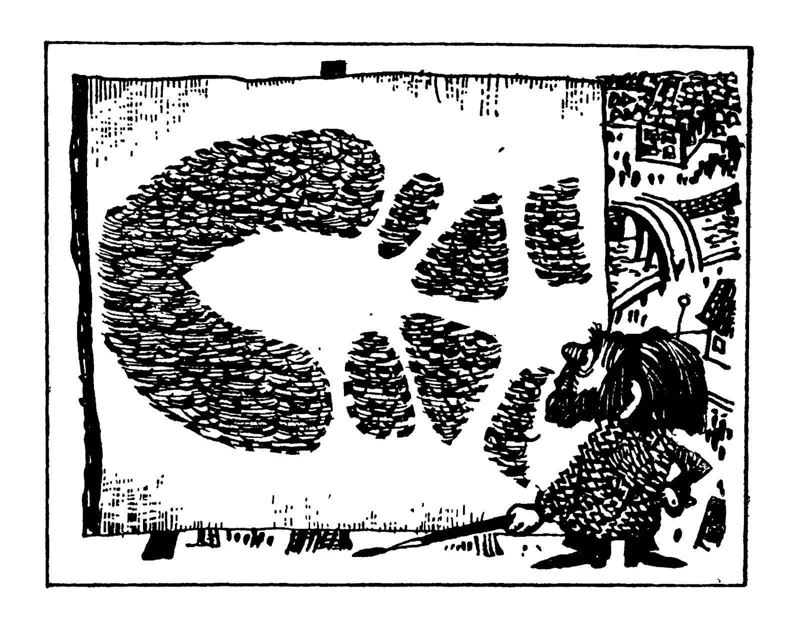


В задаче ставился вопрос: можно ли, выйдя из любого места в городе, совершить такую прогулку, чтобы пройти по всем мостам, вернуться в исходную

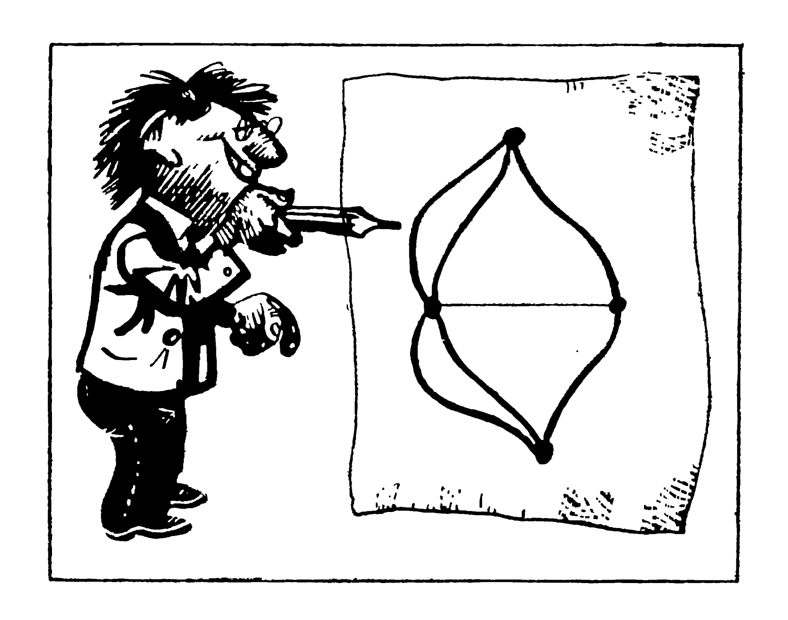
точку и при этом пройти по каждому мосту только один раз?

Попробуйте решить эту задачу.

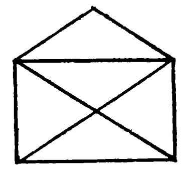
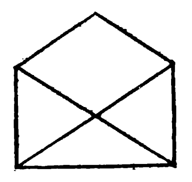
Очень быстро вы заметите, что задача ничуть не изменилась бы, если бы все мосты, ведущие на один и тот же берег или на один и тот же остров, встречались бы в одном месте (тогда отпала бы только прогулка по суше), то есть если бы план выглядел так:



Конечно, нет никакого смысла в том, что к одной и той же точке берега от одной и той же точки левого острова ведут два моста, однако на худой конец мы можем предположить, что один мост предназначен для пешеходов, другой — для транспорта. Такой подход позволяет нам использовать простую схему:



Теперь мы можем сформулировать наш вопрос также и следующим образом: можно ли только что изображенную фигуру нарисовать «одним махом», не отрывая карандаша (ведь наш гуляющий горожанин также не может вдруг воспарить в воздух)? При этом никакой линии мы не можем рисовать дважды, а карандаш должен вернуться в исходную точку. Подобные задачи для нас не новость; кто из нас не рисовал такие конверты:

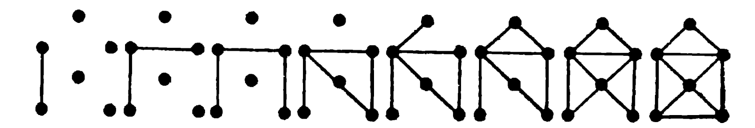
Ясно, что эти вопросы относятся к области топологии. Ответ на вопрос, можно ли такие фигуры нарисовать одним росчерком, не изменится, если мы представим себе, что фигуры сделаны из резины и мы можем их произвольно сжимать, растягивать — словом, деформировать, как нам заблагорассудится; мы не можем их только разрывать и не можем склеивать из отдельных частей.

Великий математик Леонард Эйлер дал общий ответ на вопросы такого рода. Если какую-то фигуру можно нарисовать одним росчерком карандаша, возвращающегося в исходную точку, то карандаш должен сначала выйти из первоначальной точки, а затем в нее вернуться. Сколько раз, обегая фигуру, карандаш очутится в какой-то ее вершине, столько раз он должен из этой вершины выйти, дабы продолжать движение. Таким образом, каждой входящей линии должна соответствовать выходящая, поэтому в каждой вершине должно встретиться четное число линий. Можно доказать, что это условие является также достаточным. Если в каждой вершине какой-нибудь фигуры встречается четное число линий, то эту фигуру всегда можно нарисовать одним, и притом возвращающимся в исходную точку, росчерком карандаша.

Итак, прогулка по Калининграду оказывается невозможной: каждая вершина исключает решение, потому что в левой вершине сходятся 5 линий, а в каждой из остальных трех вершин — по 3 линии, то есть везде число линий нечетное.

Что касается нарисованных конвертов, то первый мы можем начертить одним росчерком, но только при условии, что будет снято требование — непременно завершить путь в исходной точке. В верхних боковых вершинах здесь сходится по 4 линии, в самой верхней — 2 и в середине — 4. Во всех этих случаях число линий — четное, и дело могут испортить только две нижние вершины, в которых сходится по три линии. Если, однако, мы согласимся с тем, что можно начать рисовать в одной вершине, а кончить в другой, то, несмотря ни на что, мы можем нарисовать

конверт одним росчерком, проводя линии в такой последовательности:

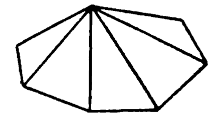


Другой конверт — это снова безнадежный случай, потому что у него больше чем две непослушные вершины. В самой высокой вершине и в середине конверта сходится четное число линий, однако в остальных четырех вершинах — по 3 линии.

Это и есть игра, из которой возникла топология. Не следует, однако, думать, что топология ограничивается такими развлечениями; она развилась в очень важную отрасль науки. Из топологии черпают очень много полезного другие отрасли знания, например физика при исследовании прохождения тока по ответвлениям проводников или химия при разработке молекулярных моделей. Вообще топологические методы всегда появляются там, где мы занимаемся структурой какого-то объекта, не принимая во внимание его размеры.

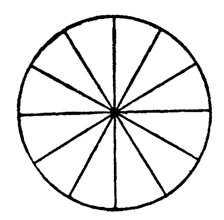
Равенство и подобие

Полезно немного поговорить о том, какие геометрические понятия мы отбрасываем в топологии. Такими понятиями являются, например, равенство и подобие. В частности, в геометрии важную роль играют равенство и подобие треугольников, потому что все фигуры можно разложить на треугольники,— например, многоугольник с помощью его диагоналей:



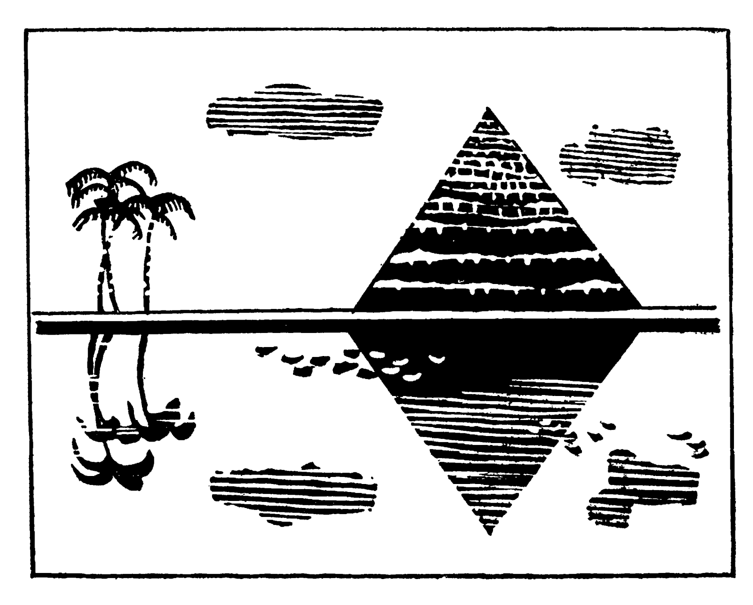
Даже круг можно рассматривать, с некоторой натяжкой (мы еще вернемся к этому вопросу), как

фигуру, составленную из треугольников; нужно только достаточно густо нарисовать радиусы круга:

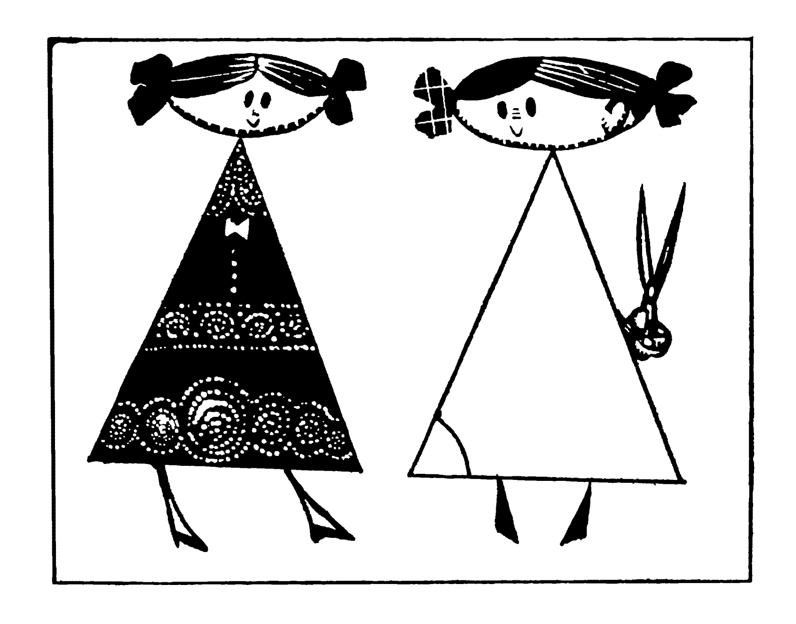


Каждая дуга выглядит тогда почти как прямолинейный отрезок. (По школьному опыту я знаю, что это «почти» вызывает неприятное чувство неуверенности; обещаю, однако, в свое время раскрыть точный смысл этого оборота.)

Два треугольника называются равными, если один из них можно наложить на другой так, что они полностью покроют друг друга. Например, два следующих треугольника обладают таким свойством:



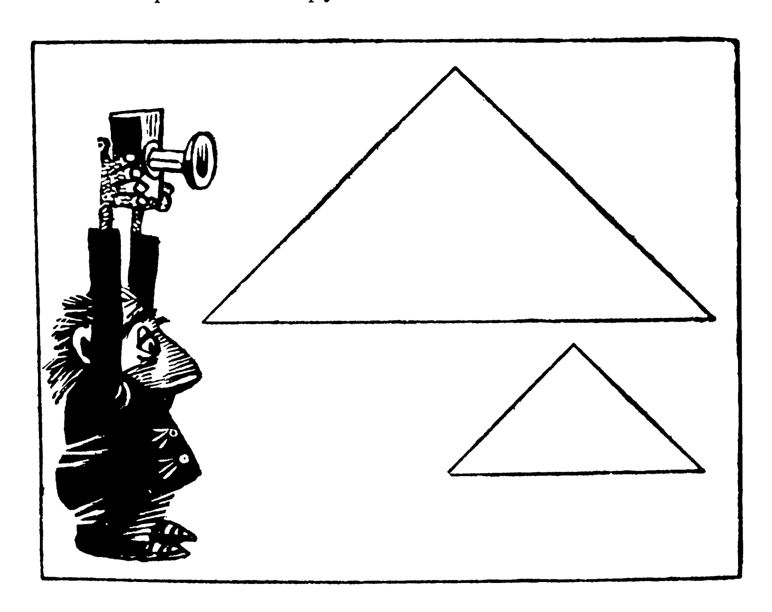
Мы можем в этом убедиться, вырезав из бумаги наши треугольники и расположив их одинаково. Если мы эти треугольники положим друг на друга, то их составные части полностью совпадут; этих составных частей — по шесть в каждом треугольнике (3 угла и 3 стороны). Однако для равенства достаточно совпадения трех составных частей, например двух сторон и угла, заключенного между ними:



Если я знаю то, что равны части треугольников, нарисованные жирными линиями, и если я наложу равные углы один на другой, то соответствующие концы прилежащих к этим углам боковых сторон также совпадут. Третья сторона верхнего треугольника проходит через эти две точки, и поэтому ей не остается ничего иного, как совпасть вместе с прилегающими к ней углами с третьей стороной нижнего треугольника.

Два треугольника подобны, если они имеют оди-

наковую форму, хотя и не обязательно одинаковые размеры; один треугольник может быть уменьшенным изображением другого:



Можно себе, например, представить, что больший треугольник был сфотографирован и на снимке мы получили его уменьшенный портрет. Мы считаем, что сторона маленького треугольника может иметь совершенно произвольную длину; ведь ничто не мешает нам предположить, что фотоаппарат позволяет делать какие угодно уменьшения. Важно только то, что аппарат не искажает изображения; две другие стороны уменьшаются во столько же раз, и их взаимное расположение не меняется. А поэтому не меняются и углы.

Мы видим, что в подобных треугольниках все стороны увеличиваются или уменьшаются в одном и том же отношении (коротко говоря, стороны пропорциональны), в то время как соответствующие углы остаются неизменными.

Однако для этого достаточно, чтобы соответствующие углы были попарно равны. Так, если мы хотим нарисовать треугольник, подобный такому треугольнику:

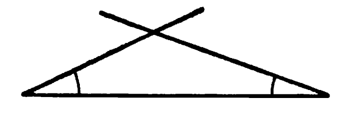


то одну сторону нового треугольника, например нижнюю, мы можем выбрать произвольно:

На концах этого отрезка откладываем теперь два нижних угла данного треугольника:



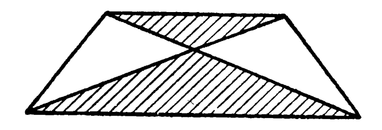
Другие составные части нового треугольника мы уже не можем выбирать произвольно: стороны двух отложенных только что углов замкнутся, если мы будем их продолжать, и тем самым завершат построение искомого треугольника.



Поэтому только этот треугольник и может быть нашим искомым треугольником. И следовательно, о подобии треугольников говорит уже равенство двух углов.

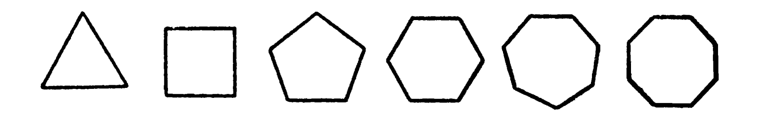
В геометрии мы на каждом шагу сталкиваемся с фигурами, равными друг другу или подобными друг другу. Например, в нарисованной ниже так называемой равнобедренной трапеции белые треугольники — равные, они совпадают при наложении, тогда как заштрихованные — подобные.

Однако в топологии уже нельзя говорить о равенстве и подобии; растяжение и сжатие изменяют одновременно и размеры и форму фигур. Прямые линии могут при этом искривиться и даже вовсе «соскочить» с плоскости.



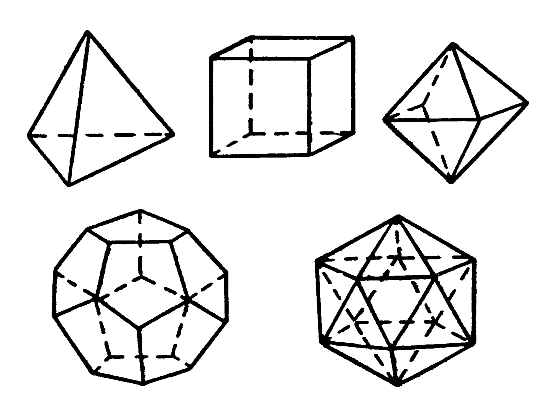
Правильные многогранники

Очень интересно то, что топология может, между прочим, ответить на вопрос, сколько существует правильных многогранников, хотя понятие «правильности» целиком и полностью связано с совпадением и с измерением. Именно: правильными мы называем те выпуклые тела, которые ограничены исключительно одинаковыми фигурами с равными сторонами и равными углами:



Многоугольники, образующие грани правильного многогранника, все равны между собой, и в каждой вершине многогранника сходится одинаковое их число. Топология решает эту задачу, принимая во внимание только то свойство правильных многогранников, что все их грани ограничены одинаковым числом сторон и во всех вершинах сходится одина-

ковое число ребер. Это свойство никак не зависит от размеров и формы тела. Топологическими методами можно доказать, что этим скромным требованиям могут удовлетворить всего лишь 5 видов многогранников. Уже в обычной метрической геометрии было доказано, что на самом деле существует пять правильных многогранников. Три из них ограничены треугольниками, один — всем известный куб — четырехугольниками и один — пятиугольниками:



Это открытие тем более поразительно, что на плоскости ничто не препятствует нам строить правильные многоугольники с каким угодно количеством сторон. Нарисованную выше последовательность этих многоугольников можно сколько угодно продолжать. Таким образом, мы не имеем права переносить на пространство без всяких изменений наши представления, связанные с плоскостью; оказывается, что в пространстве многие вопросы выглядят совсем иначе.

Остановимся на этом подробнее. У нас есть все основания надеяться на то, что в пространстве мы столкнемся с новыми явлениями, потому что движение в пространстве много свободнее движения на плоскости. Именно поэтому мы и надеялись, что,

имея большие возможности, встретим большее разнообразие правильных многогранников. Однако мы должны также принять во внимание, что большие возможности — это, как правило, оборотная сторона наиболее строгих требований. Наибольшей свободе соответствуют наибольшие обязанности. В вершинах наших плоских фигур сходятся только две стороны, тогда как в вершине тела могут сходиться три и вообще сколько угодно ребер и точно так же любое количество граней. Например, может быть даже так, что в одной вершине сходится 30 ребер, а в другой — 3, и тогда как одна грань является треугольником, другая представляет собой тридцатиугольник. Условие, чтобы многогранник отказался от этих богатых возможностей и подчинялся условию, требующему одинакового числа ребер у каждой вершины и одинакового числа сторон у каждой грани, — очень сильное ограничение. Только 5 многогранников в состоянии подчиниться этому требованию.

Мысль обратиться к топологии возникла у меня тогда, когда я размышляла, как бы половчее подсчитать сумму.

$$1+2+3+\ \dots\ +n.$$

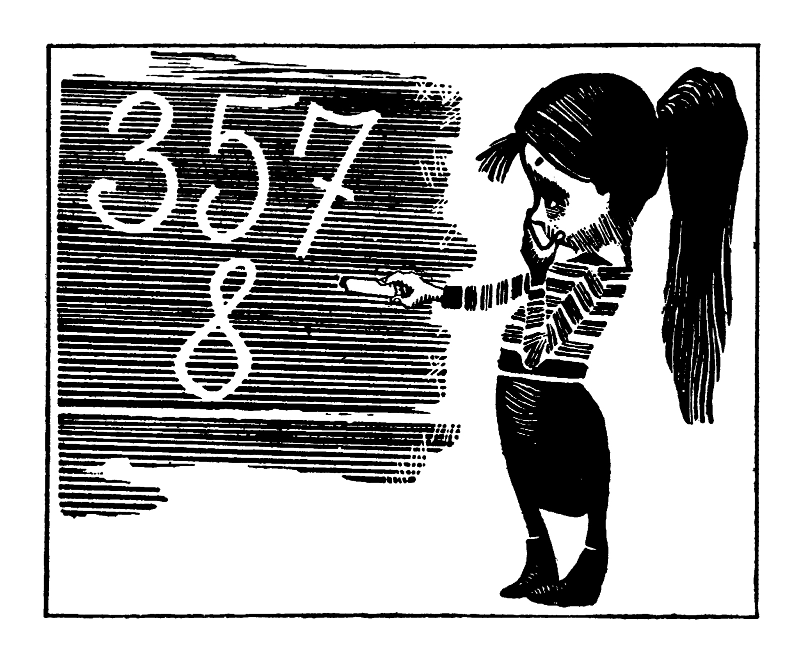
Это прекрасно свидетельствует о том, что математика представляет собой органичное целое. Чего бы мы ни касались в математике, всегда возникают связи со всеми остальными ее разделами.

6. Мы испытываем все возможности

Комбинаторика

Учитель, по-видимому, никогда не задумывался над вопросом: сколькими различными способами можно разбить свой класс на пары? В крайнем случае он старается рассадить учеников наиболее разумно, принимая во внимание существующие между ними симпатии и антипатии. Маленький же исследо-

ватель, который полон еще самого свежего любопытства, мечтает испробовать все возможности. Когда я сказала своим десятилетним ученицам, что



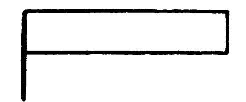
умножение на 357 можно начинать как с единиц, так и с сотен, тотчас раздался вопрос:

— А можно начинать с десятков?

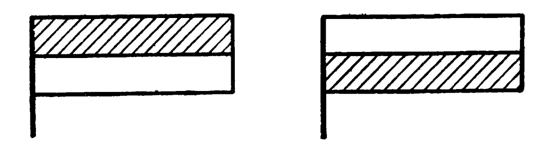
Едва я ответила, что можно, нужно только хорошо помнить, где мы записываем частичные произведения, девочки тотчас же захотели узнать, сколькими разными способами можно выполнить это умножение. Тем самым я была вынуждена провести короткую экскурсию в область **комбинаторики** (ибо именно так называется область математики, исследующая способы возможных размещений).

Нет, пожалуй, ребенка, который не интересовался бы, сколько разных флажков можно составить из

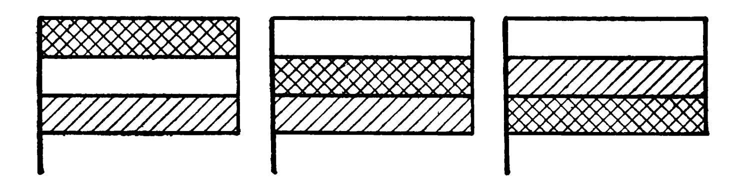
трех цветных горизонтальных полосок. Один цвет позволяет, очевидно, сделать один флажок:



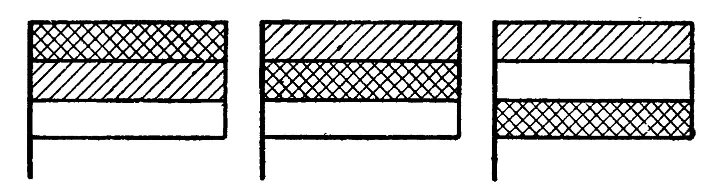
Вторую цветную полоску можно пришить к этому флажку двумя способами — при условии, что каждый цвет мы хотим использовать один только раз. Вторую полоску мы пришиваем сверху или снизу:



Как можно добавить к этим двум цветным полоскам третью? Мы помещаем ее либо сверху, либо снизу, либо посредине, между двумя первыми полосками. Из левого двухцветного флажка мы получаем три новых трехцветных:

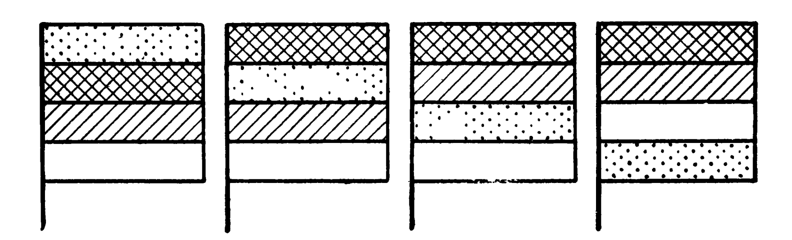


Точно так же из правого флажка мы получаем три новых:



Выходит, что из трех разноцветных полосок можно составить всего $2 \cdot 3 = 6$ флажков.

Мы можем перейти теперь к четырехцветным флажкам. Четвертый цвет можно поместить в трехцветном флажке над первым цветом, между первым и вторым цветом, между вторым и третьим и, наконец, под третьим цветом. Из каждого трехцветного флажка мы можем получить четыре четырехцветных флажка; например, из последнего трехцветного флажка получаем:



Итак, из $2 \cdot 3 = 6$ трехцветных флажков мы получаем сразу $2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$ флажка. К этим сомножителям мы можем добавить также 1 — это не вызовет никаких изменений — и, таким образом, получается такая изящная закономерность:

Число	одноцветных	флажков	равно	1
»	двухцветных	»	»	$1 \cdot 2 = 2$
»	трехцветных	»	»	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
»	четырехцветных	»	»	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Очевидно, эту последовательность можно с таким же успехом продолжать выписывать дальше, и даже тогда, когда речь вовсе не идет о флажках. Например, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ различными способами можно раздать суп пятерым ребятам, давая каждому последовательно его порцию, а $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$ разных способов существует для того, чтобы изменить последовательность шести элементов, стоящих друг за другом.

Произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

содержит такой приказ: перемножь числа от 1 до 6, но не дальше! Этот приказ обычно записывают совсем коротко, используя только последний сомножитель и восклицательный знак. Тогда наше произведение будет записано так.

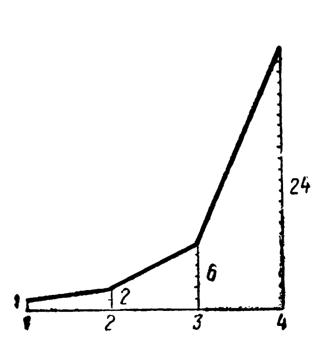
$$6!.$$

Читается эта запись как «шесть факториал». Например:

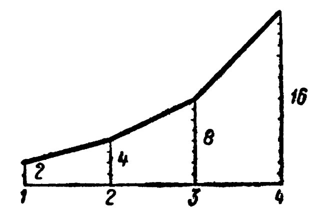
$$1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2;\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ и так далее.}$$

Величина произведений зависит, очевидно, от того, насколько далеко мы углубимся в последовательность чисел. И отметим, кстати, что это тоже функция. Нарисуем ее температурную кривую.

На горизонтальной прямой будем откладывать все числа вплоть до того, которым кончается наше последовательное перемножение всех чисел, начиная с 1, а вверх отложим соответствующие значения факториалов:



Для сравнения рядом поместим картину возрастания степеней числа 2.



Отчетливо видно, что кривая факториала находится ниже кривой степени (сравните поведение этих двух кривых на отрезке между 1 и 2), однако затем становится выше и уходит вверх много круче, нежели кривая степени. Такая картина характерна не только

для степени числа 2. Факториал возрастает «сильней» любой степени. Это почти очевидно: ведь как бы ни было велико основание степени, например, 100, возводя в степень, мы умножаем на одно и то же число — в нашем случае это и будет 100. Девяносто девять первых сомножителей факториала будут меньше соответственных сомножителей степени, однако дальше сомножители факториала будут все большими и большими — 100, 101, 102, 103... и поэтому рано или поздно кривая факториала должна оставить внизу кривую степени.

Начав с подсчета одноцветных флажков, мы смогли подсчитать шаг за шагом число двух-, трех- и четырехцветных при помощи изящных произведений:

$$1\cdot2;\ 1\cdot2\cdot3;\ 1\cdot2\cdot3\cdot4.$$

Другие задачи комбинаторики приводят нас к не менее изящным результатам. Мы уже знаем, сколько различных пар можно выбрать из какого-то числа элементов. Из 8 элементов мы можем выбрать

$$\frac{8\cdot7}{2}=28$$

пар; это мы уже доказали. Точно так же из 15 элементов мы получаем

$$\frac{15\cdot14}{2}=105$$

пар и так далее.

Нельзя ли, исходя из этих результатов, подсчитать шаг за шагом уже не пары, а число троек, четверок и так далее, которые удается составить из данных элементов?

Посмотрим, сколько существует разных способов добавления к паре третьего элемента из группы 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; например, к паре

1, 2.

Смотрим только на то, какие элементы находятся в группе, порядок же элементов нас не интересует. (Представим себе, что коллектив, насчитываю-

щий восемь человек, хочет направить одновременно на отдых группу, состоящую из трех человек. Здесь также речь идет лишь о том, кто получает путевку.) Каждый из оставшихся шести элементов можно добавить к паре 1 2, и таким образом получается 6 следующих троек:

1 2 3
1 2 4
1 2 5
———
1 2 6
1 2 7
1 2 8

(Я прошу читателя пока не обращать внимания на проведенную горизонтальную прямую.) Точно так же можно «расширить» любую пару до тройки шестью разными способами; например, из пары 2 5 получаем тройки:

2 5 1
2 5 3
2 5 4
2 5 6
2 5 7
2 5 8

или же, расположив в тройках числа в порядке возрастания:

1 2 5
———
2 3 5
2 4 5
2 5 6
2 5 7
2 5 8

На первый взгляд кажется, что троек можно построить в 6 раз больше, нежели пар. Однако некоторые тройки будут повторяться; скажем, 1, 2, 5 находится как среди троек, полученных из пары 1, 2, так и среди троек, полученных из пары 2, 5 (их-то я и подчеркнула в обоих наборах троек). Та же самая тройка появится при «расширении» пары 1, 5, потому что третьим элементом, добавляемым к этой паре, будет, в частности, и число 2. Мы видим, что каждая тройка появляется у нас троекратно. Получается она из каждой пары, которая остается после того, как мы убираем из тройки один какой-нибудь элемент. Если, например, из тройки 2 3 5 мы уберем

по очереди один какой-либо элемент, то останутся три следующие пары:

2 3
2 5
3 5

Тройка 2 3 5, с другой стороны, снова возникает из каждой такой пары, едва мы к первой добавим 5, ко второй — 3 и к третьей — 2. Таким образом, если мы хотим каждую тройку получить только один раз, то нужно общее число троек поделить на три. Поэтому окончательно число троек, получающихся из 8 элементов, можно найти, помножив число получающихся из 8 элементов пар на 6 и поделив затем результат на 3. Мы уже знаем, что число пар равно

$$\frac{8\cdot7}{2}.$$

Эту величину можно умножить на 6 так, чтобы деление на 2 по-прежнему оставалось последним действием:

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{2}.$$

Нам остается только поделить эту величину на 3. Однако совершенно безразлично, будем ли мы делить сначала ее на 2, а потом на 3 или же сразу $2\cdot3=6$. Результат в обоих случаях будет один и тот же.

Итак, из восьми элементов можно составить:

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$$

троек, если для большего изящества добавить в делителе не влияющий на результат сомножитель 1.

Легко заметить, что из 12 элементов можно составить

$$\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3}$$

троек, а из 100 элементов

$$\frac{100\cdot99\cdot98}{1\cdot2\cdot3}$$

троек.

Поскольку мы уже знаем число троек, мы можем

отыскать и число четверок. Обратимся снова к тем же восьми элементам. Из каждой тройки, если мы будем последовательно добавлять остальные элементы, получится пять четверок. Например, из тройки

1 2 3

получаются четверки

1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 3 6
1 2 3 7
1 2 3 8

Таким образом мы получили бы четверок в пять раз больше, чем троек. Однако каждая четверка появляется четырехкратно — например, четверка

1 2 3 4

из	тройки	1 2 3	путем	добавления	числа	4
»	»	1 2 4	»	»	»	3
»	»	1 3 4	»	»	»	2
»	»	2 3 4	»	»	»	1

Поэтому мы должны поделить наш результат на 4. Число троек равно

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}.$$

Это выражение мы должны теперь умножить на 5 и поделить на 4. Тогда четверок будет равно

$$\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}.$$

Теперь можно заметить закономерность. Например, число групп, состоящих из семи элементов, которое можно получить, исходя из 10 элементов, равно

$$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}.$$

Это изящный способ. Чтобы выбирать группы, по семь элементов каждая из 10, всегда как над чер-

той, так и под чертой надо поставить по семь сомножителей, причем под чертой числа от 1 до 7, а над чертой — от 10 и меньше.

Точно так же число единичных элементов, которые мы можем выбрать из 5 элементов, равно (на основании нашего правила $\frac{5}{1}=5$) пяти. Это совершенно очевидно.

Число троек, которые можно составить из трех элементов, равно $\frac{3\cdot 2.1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{6}{6}=1$, что также совершенно очевидно, потому что из мешочка с тремя шариками можно вытянуть все три только одним способом.

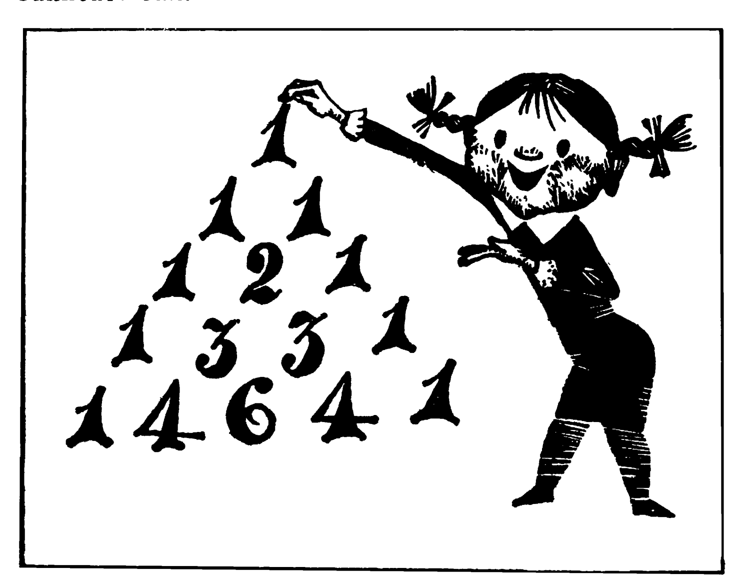
Точно так же мы можем одним только способом добыть из мешочка «пустую» руку, независимо от того, сколько шариков находится в мешочке. Поэтому условимся, что число «нуль-элементных комбинаций» из любого числа элементов равно 1.

Теперь мы можем выписать число комбинаций с последовательно возрастающим количеством элементов:

Нуль-элементные комбинации	Одноэлементные комбинации	Двухэлементные комбинации	Трехэлементные комбинации	Четырехэлементные комбинации
Из 1 элемента 1	$\frac{1}{1}=1$	—	—	—
Из 2 элементов 1	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}=\frac{2}{2}=1$	—	—
Из 3 „ 1	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{6}{2}=3$	$\frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{6}{6}=1$	—
Из 4 „ 1	$\frac{4}{1}=4$	$\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{12}{2}=6$	$\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{24}{6}=4$	$\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{24}{24}=1$

Из пустого мешка также можно вытянуть руку только одним способом, и поэтому число нуль-элементных комбинаций из нуля элементов также долж-

но быть равно 1. Если мы припишем эту единичку сверху, то результаты наших сопоставлений можно записать так:



Эта треугольная таблица носит название треугольника Паскаля. У нее много интересных свойств. Сразу видно, что она симметрична, то есть что ее левая половина является зеркальным отражением правой. Это легко понять: ведь у нас ровно столько же шансов выбрать из трех шариков один, сколько шансов оставить в мешочке два шарика. Такова же ситуация при образовании пар из пяти элементов. Каждой составленной паре соответствует тройка неиспользованных элементов. Таким образом, в случае пяти элементов число пар должно совпадать с числом троек, и эти-то числа как раз и занимают симметричное положение в треугольнике Паскаля.

Другое свойство треугольника Паскаля касается простого правила получения следующих строк. В треугольнике не случайно 2 пишется под двумя единицами: ведь $2=1+1$. Точно так же 3 находится

между 1 и 2: ведь $1+2=3$. И так далее. Эта закономерность сохраняется и в дальнейшем. Поэтому после той строки, на которой мы оборвали треугольник Паскаля, следует строка:

1 5 10 10 5 1,

потому что $1+4=5$, а $4+6=10$; отсюда точно так же мы можем получить и следующую строку:

1 6 15 20 15 6 1

и так далее.

Доказать это нетрудно, но мы ограничимся одной лишь проверкой. Впервые 15 появляется как число пар, составленных из 6 элементов; число этих элементов равно

$$\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=\frac{30}{2},$$

а это на самом деле дает 15.

Из нашего правила следует, что сумма чисел произвольной строки в два раза превышает сумму чисел предыдущей строки. В самом деле, последующая строка образуется из предыдущей строки следующим образом:

$$\underline{1\ 1}+\underline{6\ 6}+\underline{15\ 15}+\underline{20\ 20}+\underline{15\ 15}+\underline{6\ 6}+\underline{1\ 1},$$

и легко заметить, что каждое число строки 1 6 15 20 15 6 1 участвует здесь дважды.

Полная индукция

Отсюда следует еще одно свойство. Если мы будем подсчитывать суммы чисел каждой строки, то получим последовательно степени числа 2. Для первых строк это очевидно (мы пока можем забыть про верхнюю единичку), ибо $1+1=2=2^1$, $1+2+1=4=2^2$. Дальше нам уже не нужно этого доказывать. Если это свойство выполняется для какой-либо строки, то оно «передается по наследству» также и следующей строке. В самом деле, мы видели, что сумма чисел последующей строки в два раза больше суммы чисел предыдущей строки. Когда же мы какую-нибудь степень 2 еще раз помножим на 2, то она превратится

в произведение $(2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2)\cdot 2$ с еще одним сомножителем 2, то есть станет степенью двух, на единицу большей.

Этот способ доказательства, целиком основанный на построении натурального ряда, носит название *полной индукции*. Последовательность натуральных чисел начинается с 1, и, добавляя постоянно единицы, мы можем получить любое выражение этой последовательности. Полная индукция основывается на умозаключении, что каждое свойство, которое выполняется в начале последовательности натуральных чисел и с каждого числа переносится «по наследству» на следующее число, выполняется для всех натуральных чисел. Этот способ умозаключения позволяет нам доказывать что-то для всех натуральных чисел, несмотря на то, что человеческий разум никогда не в состоянии на самом деле перебрать все числа. Мы должны установить для себя совершенно твердо две вещи: во-первых, что рассматриваемое утверждение выполняется для числа 1, и во-вторых, что у него «наследственная природа».

Итак, мы можем сделать важнейший вывод: **математика в состоянии объять необъятное, охватить бесконечность конечными средствами.**

Для тех, кто когда-либо забавлялся, отыскивая курьезы, связанные с операцией умножения, первые строки треугольника Паскаля не будут в диковинку. В самом деле, выпишем последовательно степени числа 11:

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = 11\cdot 11 = 1\;2\;1$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$11^3 = 121\cdot 11 = 1\;3\;3\;1$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$11^4 = 1331\cdot 11 = 1\;4\;6\;4\;1$$

$$\begin{array}{r} 1331 \\ \hline 14641 \end{array}$$

И, таким образом, цифры результатов действительно образуют треугольник Паскаля. Если мы повнимательней вникнем в умножение, то сразу поймем, в чем здесь дело. Когда мы подсчитываем частичные суммы, мы выполняем при этом те же самые операции сложения, что и при образовании строк треугольника Паскаля. (В случае 11^5 эта закономерность нарушится, потому что при сложении частичных произведений получится результат

$$\begin{array}{r} 11^5 = 14641 \cdot 11 \\ 14641 \\ \hline 161051 \end{array},$$

тогда как соответствующая строка в треугольнике Паскаля имеет вид 1 5 10 10 5 1.)

11, однако же, равно $10+1$,

$$121 = 100 + 20 + 1 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1,$$
$$1331 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$$

и так далее. Мы видим, что числа треугольника Паскаля выступают в разложениях степеней числа $10+1$, умноженные на уменьшающиеся степени числа 10. Вторым слагаемым суммы $10+1$ является число 1. Все степени числа 1 равны 1, так как $1 \cdot 1 = 1$, и поэтому сразу можно не увидеть, что они также играют здесь роль степени другого слагаемого. Мы, однако, можем их протащить, например, следующим способом:

$$11^3 = (10+1)^3 = 1331 = 1000+300+30+1 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^3,$$

то есть так, что степени первого слагаемого возводимой в куб суммы будут с каждым разом ниже, а степени другого слагаемого — с каждым разом выше. Указанный способ записи оказывается полезным, так как разложение такого рода удается обобщить для степеней других сумм двух слагаемых, например:

$$7^3 = (5+2)^3 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3.$$

После всего, что мы уже успели выяснить, нетрудно доказать это для общего случая. Мы здесь, однако, остановимся лишь на том, что удостоверимся в собственной правоте:

$$\begin{aligned} 1\cdot 5^3 &= 5\cdot 5\cdot 5 = 25\cdot 5 = 125 \\ 3\cdot 5^2\cdot 2 &= 3\cdot 5\cdot 5\cdot 2 = 15\cdot 10 = 150 \\ 3\cdot 5\cdot 2^2 &= 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2 = 3\cdot 10\cdot 2 = 60 \\ 1\cdot 2^3 &= 2\cdot 2\cdot 2 = 4\cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

итого 343.

И действительно:

$$7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 49\cdot 7 = 343.$$

Это открытие делает расчеты более удобными. Часто, вместо того чтобы непосредственно проводить возведение в степень, выгоднее бывает разложить основание на два слагаемых, степени которых легко отыскать. Например, существуют люди, которые не умеют быстро перемножать семерки. Зато при вычислении разложения $(5+2)^3$ мы имеем дело только с удобным умножением пятерок и двоек. Это умножение можно легко проделать, умножая каждый раз 5 на 2, а уж умножение на 10 является воистину детской игрой.

Сумма двух членов носит название бинома. Поэтому обнаруженное нами правило разложения по степеням носит название биномиального разложения, или бинома Ньютона, а числа треугольника Паскаля называются коэффициентами бинома.

Квадрат суммы двух чисел

Чаще всего используется вторая степень. Вторая строка треугольника Паскаля состоит из чисел

1 2 1.

Если нужно разложить $(5+3)^2$, то мы умножаем последовательно на эти числа, а в разложении участвуют уменьшающиеся степени числа 5, начиная от 5^2, и возрастающие степени числа 3, кончая 3^2. И таким образом:

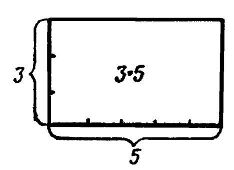
$$(5+3)^2=1\cdot 5^2+2\cdot 5\cdot 3+1\cdot 3^2,$$

или же, исключая ненужные степени единицы,

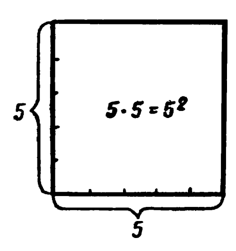
$$(5+3)^2=5^2+2\cdot 5\cdot 3+3^2.$$

Таким образом, мы пришли к всем известному, неотделимому от школьных воспоминаний правилу: сумму двух слагаемых мы можем возвести в квадрат, сложив вторую степень первого слагаемого с удвоенным произведением первого слагаемого на второе и с квадратом второго слагаемого.

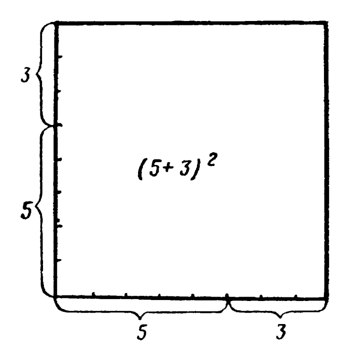
Очевидно, можно сделать это «открытие» много проще, например идя геометрическим путем. Мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению двух соседних сторон. Если же теперь мы, наоборот, имеем какое-то произведение, то можно его представить как площадь прямоугольника, боковые стороны которого соответственно равны обоим сомножителям. Например, геометрическим образом произведения $5\cdot 3$ будет прямоугольник



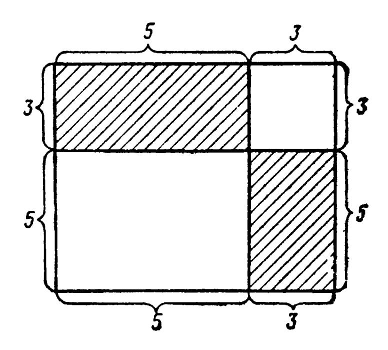
а произведение $5^2=5\cdot 5$ можно представить при помощи прямоугольника



Это, очевидно, не что иное, как квадрат, и поэтому вторая степень называется также квадратом. На «картинке», изображающей выражение $(5+3)^2$,



пропадают отдельные слагаемые нашей суммы. Однако при помощи следующего разложения снова станет очевидным подразделение суммы на отдельные слагаемые:



Среди получившихся, таким образом, кусочков площадь большего квадрата равна 5^2, а площадь меньшего квадрата равна 3^2. Кроме них, в состав нашего квадрата входят также два прямоугольника с площадями, равными $5 \cdot 3$. В итоге

$$(5+3)^2=5^2+2\cdot5\cdot3+3^2.$$

Это столь же красноречиво, как рисунки индийского учебника. Дело в том, что индийская педагогика не любит многословия. Высказывается только некое утверждение: сумма двух слагаемых может быть воз-

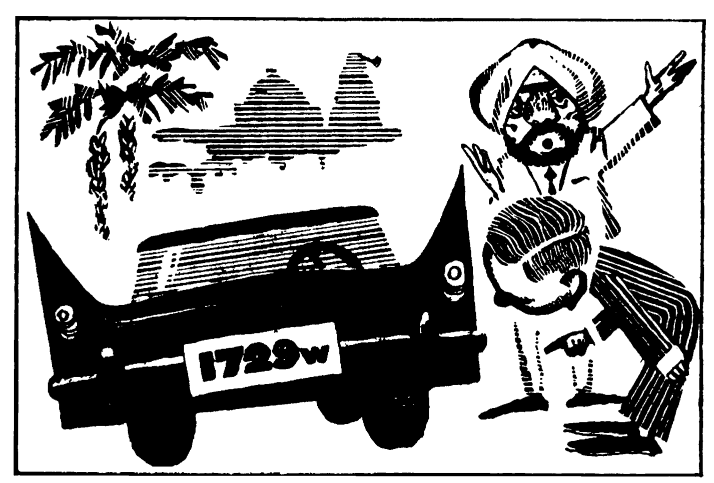
ведена в квадрат таким-то способом. Затем пишется еще слово «смотри» и рисуется чертеж, который разъясняет все:

$a \cdot b$	b^2
a^2	a-b

У кого есть глаза, чтобы видеть, — тот видит.

7. Раскрашивание серого натурального ряда

Индийцы издревле были незаурядными математиками и много сделали для развития этой науки. Об одном из индийских ученых рассказывают такой анекдот. Когда друг-европеец спросил его шутя, не приносит ли ему несчастье номер его автомашины —



1729, ему был дан самый серьезный ответ. «О нет, 1729 — очень даже интересное число. Это наименьшее число, которое удается представить в виде суммы двух кубов двумя способами: как 10^3+9^3, так и 12^3+1^3 равно 1729».

Для индийского математика даже четырехзначные числа — все еще добрые знакомые с хорошо известными черточками характера.

В наших начальных школах небольшие числа также рассматриваются как своего рода личности. Например, в глазах маленького ученика 2 — это не только одно из бесконечного числа «серых» чисел, но и хорошо известная личность. Это наименьшее четное число, оно равно 1+1, является половиной числа 4 и так далее. И все же, несмотря на то, что мы «лично знакомы» только с числами первого десятка, а индийцы — с четырехзначными числами, все эти «знакомые» человека всего лишь скромный осколок бесконечной последовательности чисел, уползающих все дальше и дальше с унылым однообразием.

Мы знаем, что существуют четные числа; каждое второе число — четное:

1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, **10**, 11, **12**, ...

Точно так же каждое третье число делится на 3:

1, 2, **3**, 4, 5, **6**, 7, 8, **9**, 10, 11, **12**, ...

Каждое четвертое число делится на 4:

1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, **8**, 9, 10, 11, **12**, ...

И так далее. Это всего лишь маленькие или большие волны внутри натурального ряда чисел, волны, которые, один раз возникнув, уходят вдаль в одном и том же ритме. Но не обманчива ли эта монотонность, не таятся ли за ней какие-либо неожиданные сюрпризы?

И в самом деле — капризы не заставляют долго ждать — чего стоит одно только распределение простых чисел!

Вернемся к результатам, полученным при изучении делимости:

Числа	1, 2, 5, 10	представляют	собой	все	делители	10
»	1, 2, 3, 4, 6, 12	»	»	»	»	12
»	1, 11	»	»	»	»	11

На 1 и на самих себя делятся все числа.

Существуют, однако, числа, например 11, которые не имеют больше никаких делителей, кроме этих двух. Их мы и называем простыми числами.

Число 1 с этой точки зрения ведет себя не так, как все. У этого числа только один делитель — 1; причем делитель этот равен самому числу. Поэтому обычно число 1 не относится к простым числам.

Наименьшим простым числом является число 2. Это в то же время единственное простое четное число, потому что всякое четное число делится на 2, а это не противоречит «правилам поведения» простых чисел только тогда, когда делитель 2 равен самому числу.

Разложение на простые множители

Простые числа называются так потому, что они образуют своеобразные последовательности, из которых можно составить любое другое число. Поэтому мы и называем остальные числа сложными. Точнее это можно сформулировать так: каждое сложное число можно представить в виде произведения простых чисел.

Попробуем, например, записать в виде произведения число 60:

$$60=6\cdot 10;$$

6 и 10 можно затем разложить на множители:

$$6=2\cdot 3 \text{ и } 10=2\cdot 5.$$

Если мы подставим эти сомножители вместо 6 и 10

$$60=2\cdot 3\cdot 2\cdot 5,$$

то все сомножители будут уже простыми числами.

Есть и иной путь. Мы уже видели, что 60 можно записать в виде произведения двух чисел нескольки-

ми способами. Если мы будем исходить из такого разложения:

$$60 = 4 \cdot 15,$$

то

$$4 = 2 \cdot 2 \quad \text{и} \quad 15 = 3 \cdot 5,$$

и поэтому

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Если выбрать разложение

$$60 = 2 \cdot 30,$$

то $30 = 5 \cdot 6$, а $6 = 2 \cdot 3$, так что $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$;
или же $30 = 2 \cdot 15$, а $15 = 3 \cdot 5$, так что $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$;
или же $30 = 3 \cdot 10$, а $10 = 2 \cdot 5$, так что $30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$.

Видно, что 30 в любом случае разлагается на произведение простых чисел 2, 3 и 5. Подставив это произведение вместо числа 30, получим

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Всякое другое сложное число можно так же легко разложить на его простые множители (и можно показать, что разные пути приводят к одному и тому же разложению на простые множители).

Если у кого-то в первое время будет вызывать затруднение вопрос, с чего начать, то достаточно уяснить себе, что наименьший делитель данного числа (отличный от 1) обязательно будет простым числом. Ибо если бы он был сложным числом, то в нем содержался бы еще меньший делитель, и этот последний также оказался бы делителем нашего первоначального числа. Если мы всегда будем искать наименьший делитель, то простые множители любого числа благополучно выделятся один за другим. Например:

$$90 = 2 \cdot 45;$$
$$90 = 2 \cdot \overbrace{3 \cdot 15};$$
$$90 = 2 \cdot 3 \cdot \overbrace{3 \cdot 5}.$$

Такое разложение дает нам исчерпывающие сведения

о структуре числа. Из него можно, например, узнать, что у числа 90, кроме 1, есть такие делители:

состоящие из одного сомножителя: 2, 3, 5;

состоящие из двух сомножителей:

$$2 \cdot 3 = \mathbf{6},\ 2 \cdot 5 = \mathbf{10},\ 3 \cdot 3 = \mathbf{9},\ 3 \cdot 5 = \mathbf{15};$$

состоящие из трех сомножителей:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{18},\ 2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30},\ 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{45};$$

состоящие из четырех сомножителей:

$$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{90}.$$

Размещение простых чисел

Полезно познакомиться ближе с этими последовательностями, из которых строятся числа. Попробуем последовательно выписать простые числа. Мы знаем, что первым простым числом является число 2. На остальные четные числа мы можем уже не обращать внимания: все они делятся на 2.

Числа 3, 5 и 7 также простые.

Можно было бы подумать, что число 9 тоже простое, но это не так: ведь 9 делится на 3.

Можно было бы решить, что простые числа начинают теперь встречаться реже, но это тоже неверно — числа 11 и 13 снова оба простые.

Мне придется попросить читателя немного потрудиться и самостоятельно выписать все простые числа хотя бы до 50.

Чтобы вы могли проверить свой результат, я также выпишу эту последовательность чисел. Однако же мы только тогда почувствуем, насколько он нерегулярен, когда сами начнем трудиться, то и дело ошибаясь, над его отысканием.

Последовательность простых чисел выглядит так:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.



Еще в античности был найден остроумный способ, который позволяет безошибочно и механически выписывать эту причудливую последовательность, — речь идет о так называемом решете Эратосфена. Выпишем сначала все числа от 2 до 50. Первое число последовательности заведомо простое число; в этом можно удостовериться, даже не глядя на него: если бы оно не было простым, то каждый собственный делитель был бы меньше его и находился бы в последовательности перед этим числом, однако перед ним ничего нет. Лишь теперь мы можем посмотреть, каково это первое число: оно есть 2.

Каждое число через одно от 2 кратно числу 2 и поэтому не может быть простым числом. Зачеркнем их в нашей последовательности:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	21
~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~	41
~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~	

Ближайшее число, оставшееся невычеркнутым после числа 2, может быть только простым числом: в противном случае оно должно было бы быть кратным одному из простых чисел; в то же время перед ним находится лишь одно простое число, причем числа, кратные ему, мы только что усердно вычеркивали. Смотрим теперь на это число: оно равно 3. Каждое третье число после числа 3 кратно 3, и поэтому мы вычеркиваем также и эти числа. Нет ничего страш-

ного в том, что некоторые числа оказываются вычеркнутыми дважды:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41
~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~	

Идем дальше. Ближайшее из оставшихся чисел — 5. Нам нужно снова приняться вычеркивать числа, на этот раз кратные 5. Так мы вычеркиваем каждое пятое число, начиная с 5, а затем — каждое седьмое, начиная с 7:

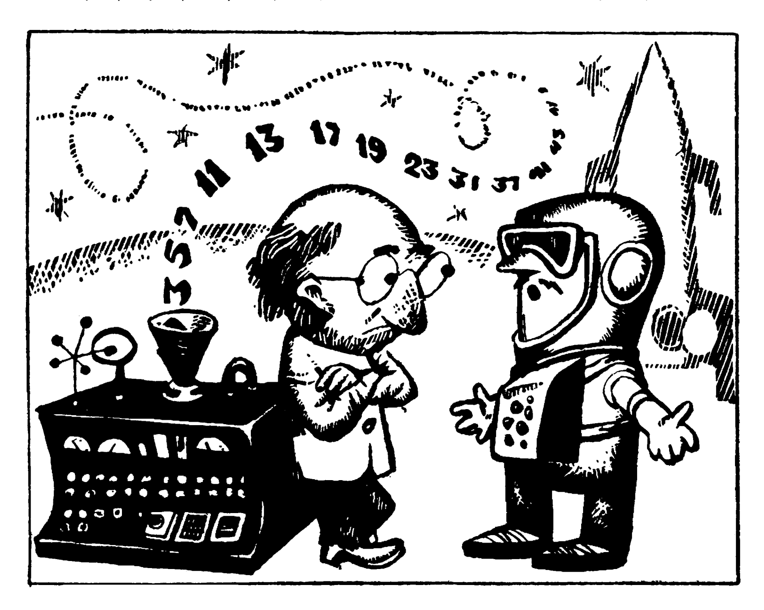
2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11
~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~
~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31
~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41
~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	

Остальные числа можно не принимать во внимание, потому что наименьшее из оставшихся чисел — это 11, а 11 раз по 7 выводит нас за пределы 50, тогда

как все меньшие кратности 11 находятся среди вычеркнутых чисел.

Выпишем оставшиеся числа:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.



Мы действительно получаем выписанные ранее простые числа, заключенные между 2 и 50.

Можно вообще построить машину, которая будет выполнять все эти подсчеты и безошибочно отыскивать все простые числа, заключенные в каких угодно границах. Это никак не меняет того факта, что простые числа появляются, пренебрегая какими бы то ни было границами, и появляются в высшей степени нерегулярно.

Можно, например, доказать, что между ними существуют пробелы каких угодно размеров, нужно только достаточно далеко продвинуться вперед по последовательности чисел. Например, результаты следующих действий дают пробел, содержащий по крайней мере 6 единиц, то есть дают шесть чисел

подряд, и все эти шесть чисел не являются простыми:

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+2; \qquad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+3;$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+4; \qquad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+5;$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+6; \qquad 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+7.$$

В самом деле, эти числа идут подряд одно за другим, потому что каждое из них ровно на единицу больше предыдущего. В то же время никакое из этих чисел не является простым, потому что произведение $2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ делится на каждый из своих множителей и поэтому первое число — сумма двух слагаемых, каждое из которых делится на 2, второе число — по тем же причинам — делится на 3, третье — на 4, четвертое — на 5, пятое — на 6 и шестое — на 7. Выполнив умножение, мы получаем

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040;$$

таким образом, речь идет о шести следующих числах:

5042, 5043, 5044, 5045, 5046, 5047.

Это уже достаточно крупные числа; мы должны были весьма глубоко проникнуть в область чисел, чтобы получить таким способом пробел между простыми числами, равный 6 единицам (очевидно, не исключена возможность, что такой пробел уже был много раньше). Если бы мы не пожалели своих сил и принялись оперировать очень большими числами, то таким же образом можно было бы получить пробел длиной хотя бы в 100 единиц; нужно было бы только прибавлять к произведению

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot101$$

числа от 2 до 101. Точно так же можно было бы получить пробелы какой угодно величины.

Однако как далеко бы мы ни врезались в последовательность чисел, всегда после произвольно больших пробелов найдутся снова соседние нечетные числа, которые оказываются простыми числами, как, например, числа 11 и 13 или же 29 и 31 в начале числовой последовательности. Математики предполага-

ют, что такие «пары-близнецы» простых чисел проявляются как угодно далеко, какую бы удаленную часть числовой последовательности мы ни рассматривали. Однако до сего дня в общем случае этого доказать не удалось.

Теорема о размещении простых чисел

Появляются ли вообще простые числа как угодно далеко? Не окрашивают ли они лишь какой-то кусок числовой последовательности?

Ответ на этот вопрос был дан уже две тысячи лет назад. Евклид изящно доказал, что существует бесконечное количество простых чисел. В этом мы убеждаемся так же, как и в самой бесконечности числового ряда. Как только кто-нибудь скажет: «Вот здесь конец», я тотчас могу доказать ему, что песня еще не кончилась, что простые числа имеются и за пределами этой границы.

Достаточно это сделать для одного случая; для любого другого случая картина будет точно та же. При доказательстве мы должны принять во внимание лишь тот факт, что на 2 делится только каждое второе число, на 3 — каждое третье и так далее. Поэтому число, следующее сразу же после кратного двум, не может делиться на 2; число, стоящее за числом, кратным 3, не может делиться на 3, и так далее.

Если бы теперь кто-то заявил, что нет простых чисел, кроме

$$2, 3, 5, 7,$$

то такое утверждение можно было бы опровергнуть сразу, потому что из выписанных простых чисел можно образовать число

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7+1.$$

Число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ делится на 2, 3, 5 и 7. И поэтому число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7+1$, следующее непосредственно за ним, не может делиться ни на одно из этих чисел. Однако же это обездоленное число должно иметь какой-то простой множитель, ведь оно все-таки число. Значит, оно либо разлагается на простые множители, ли-

бо само является простым числом. Поэтому тот, кто утверждал, что нет простых чисел, кроме 2, 3, 5 и 7, явно поторопился со своим утверждением; должны существовать простые числа, больше 7, и точно так же должны существовать простые числа, больше какого угодно простого числа.

Подсчитаем теперь число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$. Результат равен 211. Попытавшись разложить это число на множители, мы обнаруживаем, что у него нет никаких делителей, кроме 1 и самого себя. И поэтому — случайно — число это оказывается само простым числом, и именно оно и является тем простым числом, большим 7, существование которого мы хотели доказать.

Очевидно, нет и речи о том, что число это — первое простое число, непосредственно следующее за 7.

Мы вовсе не обольщаемся надеждой, что так ловко можно строить последовательность простых чисел.

Точнее говоря, наш способ рассуждений привел нас к результату, согласно которому нужно от 7 «подниматься» к $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$; от 11 — к $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$, чтобы получить новое простое число. Однако пробелы между этими простыми числами слишком велики. Нельзя ли получить простые числа также в более узких границах?

Многие математики занимались этой проблемой. Вспомним только один из наиболее красивых результатов: русский математик Чебышев доказал, что между любым числом (отличным от 1) и его удвоением всегда найдется простое число:

Между	2 и 4	3,
»	3 и 6	5,
»	4 и 8	как 5, так и 7
»	5 и 10	только 7

Хотя нельзя в этом усмотреть никакой закономерности, однако это явление имеет место всегда, как далеко бы мы ни проникали в последовательность натуральных чисел. Если мы будем выбирать достаточно большие числа, то между этими числами и их удвоениями окажется даже произвольное количество простых чисел.

Следовательно, мы имеем своего рода правило, связывающее простые числа, которые вначале казались чуждыми какой бы то ни было дисциплине. Они не могут удаляться друг от друга как угодно далеко.

Более того, существует в определенном смысле «правило размещения простых чисел», примерно столь же почти достоверное, как утверждение, что круг можно рассматривать как фигуру, составленную из множества маленьких узких треугольников (я уже обещала, что позднее мы займемся точным смыслом этого «почти»).

До 2 включительно находится одно только простое число — это само число 2. До 3 находятся уже два простых числа — 2 и 3; до 4 — только те же два числа; до 5 — уже три простых числа, потому что простым является само число 5; до 6 — только те же три; до 7 — уже 4, а именно 2, 3, 5 и 7; до 8 — как и до 9 и до 10 — снова те же самые четыре числа. И так далее. Количество простых чисел, таким образом, равно:

до 2;	до 3;	до 4;	до 5;	до 6;	до 7;	до 8;	до 9;	до 10.
1	2	2	3	3	4	4	4	4

Числа этой последовательности делают скачок, едва мы доходим до нового простого числа, и происходит это совсем не регулярно. И однако, можно выписать одну хорошо известную последовательность, которая образуется в соответствии с определенным правилом [1] и которая обладает тем свойством, что ее выражения становятся с каждым разом более похожими на выражения нашей последовательности, по мере того как мы двигаемся все дальше и дальше.

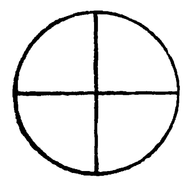
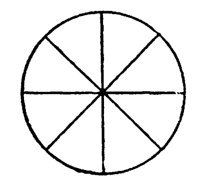
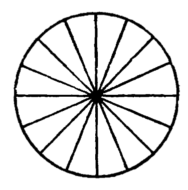
---

[1] Для тех, кто еще помнит логарифмы, я привожу здесь эту последовательность:

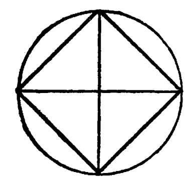
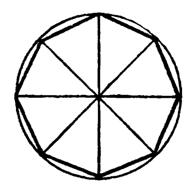
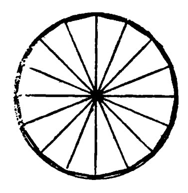
$$\frac{2}{\log 2}, \quad \frac{3}{\log 3}, \quad \frac{4}{\log 4}, \quad \frac{5}{\log 5}, \quad \ldots .$$

Хотя трудно рассчитывать, что читатель помнит эти логарифмы: это так называемые натуральные логарифмы. Мы вернемся к ним позднее.

Удаленные участки этой последовательности можно считать «почти» одинаковыми. Точно так же ограниченные неуловимыми кривыми линиями секторы круга

становятся все более похожими на соответствующие треугольники, ограниченные прямыми линиями.

Продолжая деление круга достаточно долго, мы можем считать соответствующие секторы круга и треугольники «почти» равными.

Точное правило для простых чисел просто нельзя себе вообразить, однако это «почти» регулярное их поведение также имеет точный смысл. Как я обещала, я еще вернусь к этому.

Я не стану даже пытаться давать хотя бы приближенное доказательство теоремы о размещении простых чисел. Издавна самые видные математики передавали это доказательство из рук в руки, постоянно в нем что-то уточнялось и дополнялось, пока, наконец, оно не обрело свой нынешний вид. Математики стараются определить как можно более точно, насколько велика ошибка, которую мы допускаем, замещая выражения нашей нерегулярной последовательности выражениями той последовательности, ко-

торую удается построить в соответствии с определенным правилом. Стимулом исследовательских работ здесь является уже не вопрос пользы и целесообразности, а изящество и трудность темы. Это изящество совсем не похоже на то, с которым мы сталкивались, предаваясь «забавам» в области комбинаторики. Это эстетика беспредельности, а также и смелая попытка взять в руки, подчинить себе то, что ведет себя нерегулярно.

Теорема о размещении простых чисел свидетельствует о том, что простые числа, которые мы изучали в начале числового ряда, в тех частях последовательности чисел, которым мы успели рассмотреть, отличаются беспорядочным расположением, однако, рассматриваемые как бесконечное целое, числа эти обнаруживают некоторую упорядоченность. Мне вспоминается сравнение, которое я где-то вычитала в связи с вопросом о свободе воли: когда мы смотрим на летящих пчел, нам кажется, что отдельные насекомые движутся в самых разных направлениях; однако же рой как целое летит, имея определенную цель, в каком-то определенном направлении.



8. „Задумайте какое-нибудь число“

Вернемся теперь к прикладной математике. Объем куба мы уже умеем подсчитывать. Часто нам нужно знать также объемы тел, форма которых неправильна. Однако измерить непосредственно объемы этих тел мы не можем. В подобных случаях существует такой выход из положения. Допустим, что фигура сделана из дерева; ее вес мы можем измерить. Затем из дерева той же породы выточим кубик объемом в 1 кубический сантиметр и взвесим его. Объем нашего тела содержит столько кубических сантиметров, во сколько раз вес тела превышает вес деревянного кубика.

Уравнения

Как видите, в этом случае объем нельзя определить непосредственно; однако можно измерить что-то другое, находящееся в известной нам зависимости от объема, — измерить вес тела. От этой величины мы должны затем вернуться к объему, который ищем.

В математике очень часто бывает именно так, что какая-то величина непосредственно нам не известна, зато известны какие-то зависимости, которым эта величина удовлетворяет. Из этих зависимостей мы можем отыскать значение неизвестной нам величины.

Основная, руководящая мысль такого рода действий, имеющих решающее значение во многих областях человеческой деятельности, по сути дела, ничем не отличается от известных всем загадок такого рода. Я задумываю какое-то число, прибавляю к нему столько же, результат умножаю на 3... и так далее.

После того как я перечислю еще ряд действий, выполненных с задуманным числом, я говорю в конце концов, что в итоге получается такое-то число, допустим, 36. И прошу отгадать, какое число было задумано вначале.

Например, нужно отгадать, какое число задумывалось, если к этому числу прибавляется 5 и в ре-

зультате получается 7. Каждый тотчас ответит, что это было число 2.

Перейдем теперь к более трудной задаче. Я задумываю некоторое число, умножаю его на 5, делю результат пополам, затем добавляю 3 и в результате получаю 18. Какое число было вначале?

Обычно такие загадки задаются не письменно, а устно, и тот, у кого спрашивают ответ, легко забывает все, что ему говорили. Поэтому самый лучший способ — записывать загадку сразу, слушая ее условие. Задуманного числа спрашиваемый не знает, и число это можно обозначить x. (Думаю, что читатель не имеет ничего против этого обозначения. Написал ведь поэт: «Потоки все впадают в Стикс, о разрешающий все x»! Вот и обозначим через x то неизвестное число, которое нужно раскрыть.) Спрашиваемый записывает порядок действий: его партнер задумал x и умножил это число на 5. Тем самым получено $5x$. Затем число это было поделено на 2, так что получилось $\frac{5x}{2}$. Наконец, к этому последнему числу прибавляется 3, получается $\frac{5x}{2}+3$ и утверждается, что все это равно 18.

$$\frac{5x}{2}+3=18.$$

Задуманное число удовлетворяет этому уравнению, и мы должны из него найти задуманное число.

Есть люди, голова которых так ловко приспособлена к выполнению всяких расчетов, что они легко решают такие уравнения. Если кому-либо это не удается сделать, то придется продвинуться еще на шаг: прибавив к какому-то числу 3, он получит 18; следовательно, этим числом могло быть 15:

$$\frac{5x}{2}=15.$$

Отсюда уже легче угадать, каково было значение x. Если же это сделать по-прежнему не удается, то он может облегчить свою участь, сделав еще один шаг:

то, что после деления пополам дает 15, до деления должно быть равно 30:

$$5x=30.$$

Ну, теперь уж всякий может отгадать, что число, которое, будучи повторено пятикратно, дает 30, может быть только 6.

Точно так же, переходя с одной ступени на другую, мы можем попытаться «распутать» всякое уравнение. Когда от

$$\frac{5x}{2}+3=18$$

мы перешли к

$$\frac{5x}{2}=15,$$

с левой стороны от знака равенства исчезло слагаемое 3. Зато число, стоящее справа, уменьшилось на 3. Обычно об этом говорят так: слагаемое, стоящее в одной стороне уравнения, можно переносить в другую сторону как вычитаемое.

Когда от уравнения

$$\frac{5x}{2}=15$$

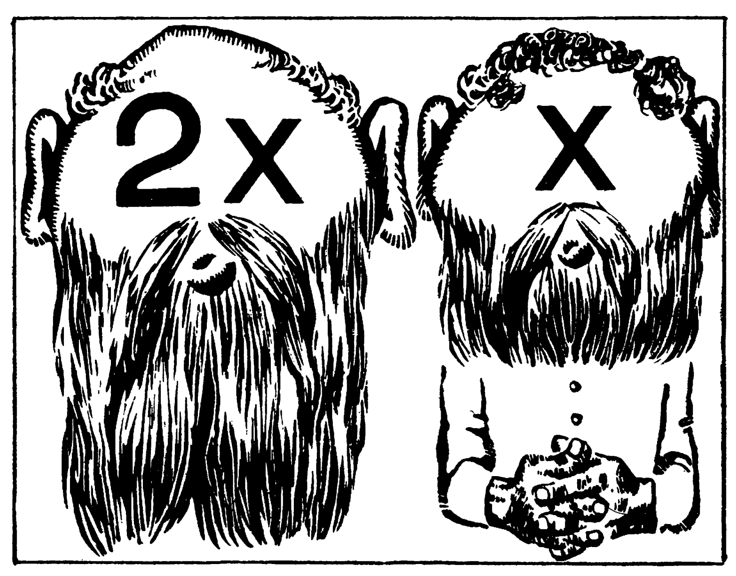
мы переходим к уравнению

$$5x=30,$$

слева исчезает делитель. Зато число справа увеличилось в два раза. Мы говорим об этом так: делитель можно переносить в другую сторону уравнения как сомножитель.

Вообще можно переносить выражения из одной стороны уравнения в другую, заменяя данное действие обратным.

Если даже мы сталкиваемся с каким-нибудь хитро поданным уравнением, все равно речь, по сути дела, идет не о чем ином, как об отгадывании какого-то задуманного числа. Пусть, например, текст задачи звучит так: «Отцу 48 лет, сыну 23 года,



Через сколько лет отец будет ровно в два раза старше сына?»

Многие отыщут ответ сразу, не составляя никакого уравнения. Если же кто-то не скор на подсчеты, то ему остается рассуждать так.

Тот, кто соображает быстрей, уже получил результат. Так что я могу представить себе, что он задумал какое-то число, которого я не знаю, то есть число это равно x. Иначе говоря, отец через x лет будет в два раза старше сына. Но каким образом тот, кто уже получил решение, отыскал ответ?

Он попросту подсчитал, сколько лет будет отцу и сыну через x лет, и увидел, что на самом деле возраст отца будет тогда равен удвоенному возрасту сына. Через x лет отец будет на x лет старше, то есть ему будет $(48+x)$ лет, сыну же будет $(23+x)$ лет. Ловкий «счетчик», таким образом, задумал число, прибавил его к 48 и к 23 и утверждает, что результат первого сложения равен удвоенному результату второго сложения:

$$48+x=2 \cdot (23+x).$$

Отсюда теперь нужно найти x. Умножение на 2 справа можно выполнить, умножая на 2 каждое слагаемое стоящей в скобках суммы:

$$48+x=46+2x.$$

Неизвестное число x, стоящее слева, переносится — как вычитаемое — в правую сторону и помещается рядом с $2x$. Число 46 переносим справа — тоже как вычитаемое — в левую сторону уравнения и ставим рядом с числом 48. Выражения, содержащие неизвестное x, оказываются собранными в одной стороне уравнения:

$$48-46=2x-x.$$

Очевидно, $48-46=2$, и ясно также, что, отняв от $2x$ одно x, мы получим одно x. Мы приходим к результату

$$2=x.$$

То есть через два года отец будет в два раза старше сына. В самом деле, через два года отцу будет 50, а сыну — 25 лет.

Усложним себе жизнь теперь еще больше. «Я задумываю сразу два числа, и их сумма равна 10. Что это за числа?»

Чтобы записать эту задачу, обозначим задуманные числа x и y (если я не знаю ни имени, ни фамилии какого-то человека, я могу называть его инициалами XY). В нашей задаче, таким образом, утверждается, что

$$x+y=10.$$

Очень легко можно отыскать два таких числа: например, числа 1 и 9 обладают этим свойством. Однако же 2 и 8 имеют то же свойство! Задуманные числа могут быть также равны 4 и 6; легко найти и другие решения. Да это чистое надувательство — исходя из подобной информации, нельзя получить оба числа. Спрашиваемый имеет полное право потребовать: «Скажи мне еще что-нибудь про эти два числа». Хорошо, я добавлю еще, что их разность равняется 2:

$$y-x=2.$$

Теперь мы можем уже очень легко обнаружить, что существуют только два числа, удовлетворяющие таким условиям. Этими числами будут 4 и 6, ибо на самом деле сумма их равна 10, а разность равна 2.

Чтобы «отгадать» два неизвестных числа, нам потребовались два уравнения, или так называемая система уравнений. Если трудно углядеть сразу, каковы два отыскиваемых числа, то решение можно снова получить, пользуясь определенными приемами.

Допустим, кто-то не угадал, что решениями системы уравнений являются числа 4 и 6, тогда он мог бы избрать такой путь: если вычитаемое, находящееся слева, мы перенесем вправо как слагаемое, то слева останется один только y:

$$y=x+2.$$

Отсюда видно, что второе задуманное число на 2 больше первого. Поэтому задачу можно было бы сформулировать проще: «Я задумываю какое-то число, добавляю к нему число, на 2 большее, и получаю 10. Какое число было задумано?»

Это можно записать следующим образом:

$$x+(x+2)=10.$$

Здесь мы имеем дело только с одним неизвестным, и мы уже знаем приемы, необходимые для отыскания этого одного неизвестного. Если бы мы знали x, то получить y можно было бы без всякого труда: ведь мы знаем, что y на 2 больше, чем x.

Другой пример. «Я задумываю два числа, к первому числу прибавляю второе число, взятое дважды, и получаю 11; затем к удвоенному первому числу я прибавляю второе число, взятое четыре раза, и в результате получается 22. Какие числа были задуманы?»

Весь этот текст можно коротко записать так:

$$x+2y=21;$$
$$2x+4y=22.$$

Всякий мало-мальски наблюдательный читатель тотчас заметит, что его снова провели. Попробуем убедиться в этом: числа 1 и 5 удовлетворяют первому условию, потому что

$$1+2\cdot5=11,$$

и эти же числа удовлетворяют второму условию, так как

$$1\cdot2+5\cdot4=22.$$

Можно было бы подумать, что мы отыскали уже задуманные числа. Однако присмотримся внимательней: 3 и 4 удовлетворяют условиям первого уравнения, потому что

$$3+2\cdot4=11,$$

удовлетворяют они и условиям второго уравнения, так как

$$2\cdot3+4\cdot4=22.$$

Оказывается, что всякая пара чисел, удовлетворяющая первому условию, удовлетворяет также и второму условию. Второе условие не дает возможности выбирать определенную пару чисел. Но это само собой разумеется! Каковы бы ни были числа x и y, число $2x$ всегда в 2 раза превышает число x, а число $4y$ всегда в два раза больше, чем $2y$. Таким образом, сумма $2x+4y$ должна быть в два раза больше суммы $x+2y$. Поскольку $x+2y=11$, то $2x+4y$ может быть равна только 22. Так что второе уравнение не говорит нам ровно ничего нового о задуманных числах; оно выражает ровно то же самое, что и первое уравнение, только разве что более замысловато.

Еще большим коварством обладает задача отыскания x и y из системы уравнений:

$$x+2y=11;$$
$$2x+4y=23.$$

Здесь можно было бы ломать голову очень долго, потому что не существует чисел, которые могли

бы одновременно удовлетворять обоим уравнениям. Мы уже видели, что $2x+4y$ для любых x и y всегда будет в два раза больше, чем $x+2y$. Если $x+2y=11$, то $2x+4y$ должно быть равно 22, и поэтому не может быть равно 23. Второе условие уличает первое во лжи.

Подытожим наши результаты: два неизвестных можно отыскать из двух уравнений, если эти уравнения не говорят об одном и том же или не противоречат друг другу.

А теперь попробуем разгадать такую загадку: «Я задумываю какое-то число, возвожу его в квадрат, добавляю к результату восьмикратное значение задуманного числа и получаю 9». Записываем:

$$x^2+8x=9.$$

Здесь только одно неизвестное, но зато новая беда: неизвестное это возведено во вторую степень. Мы имеем уравнение второй степени.

Начнем с самого простого уравнения второй степени. Возьмем, например, уравнение

$$x^2=16.$$

Всякий тотчас заметит, что задуманное число равняется 4, потому что именно 4 — то самое число, которое, будучи возведенным в квадрат, даст 16. Задача

$$(x+3)^2=16$$

также проста, потому что число, которое, будучи возведенным в квадрат, дает 16, все то же 4, и мы получаем

$$x+3=4,$$

откуда тотчас следует, что $x=1$.

Здесь мы имели дело с выражением $(x+3)^2$. Вспомним теперь, каким образом можно разложить квадрат суммы двух выражений: квадрат первого выражения (в нашем случае x^2) плюс удвоенное произведение обоих выражений (в нашем случае $6x$) плюс квадрат второго выражения (в нашем случае

$3^2=9$). В таком развернутом виде наше уравнение будет иметь вид:

$$x^2+6x+9=16.$$

Если бы уравнение преподнесли нам именно в таком виде, мы бы понятия не имели, как к нему подступиться. Для этого нам нужно было бы поупражняться в распознавании квадрата суммы двух выражений в развернутом виде. Если, например, уравнение имеет вид

$$x^2+8x+16=25,$$

то нужно обнаружить, что $8x=2\cdot 4x$, а 16 является квадратом только что записанной четверки. И таким образом:

$$x^2+8x+16=x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2=(x+4)^2.$$

Отсюда видно, что мы имеем дело с уравнением

$$(x+4)^2=25,$$

которое удается решить точно так же, как и предыдущее, решенное уже нами уравнение.

Очевидно, ничего не случится с решенным нами только что уравнением, если мы перенесем 16 вправо в качестве вычитаемого ($25-16=9$), и тогда, наконец, мы получаем уравнение, данное нам сразу же и оставленное нами до лучших времен:

$$x^2+8x=9.$$

Можно легко заметить, что левую сторону удается дополнить до квадрата суммы двух выражений:

$$x^2+8x=x^2+2\cdot 4x.$$

Не хватает теперь только $4^2=16$, тогда бы мы имели $(x+4)^2$. Если к каждой из одинаковых величин добавим одно и то же число, то величины по-прежнему останутся равными. Добавим в нашем случае к обеим сторонам число 16:

$$x^2+8x+16=9+16;$$
$$x^2+8x+16=25.$$

И таким образом мы получаем уравнение в том виде, с которым мы уже научились управляться.

Провести такое дополнение до квадрата двух выражений удается всегда. Если выражение, содержащее вторую степень, не равно x^2, а, например, $3x^2$, как в уравнении

$$3x^2+24x=27,$$

то обе стороны уравнения можно поделить на 3. В самом деле: если величины в правой и левой частях уравнения равны, то равны и их третьи части. Третьей частью $3x^2$ является x^2, третьей частью $24x$ является $8x$, третьей частью 27 будет 9. Поэтому мы получаем:

$$x^2+8x=9,$$

а уравнение такого вида мы уже умеем решать.

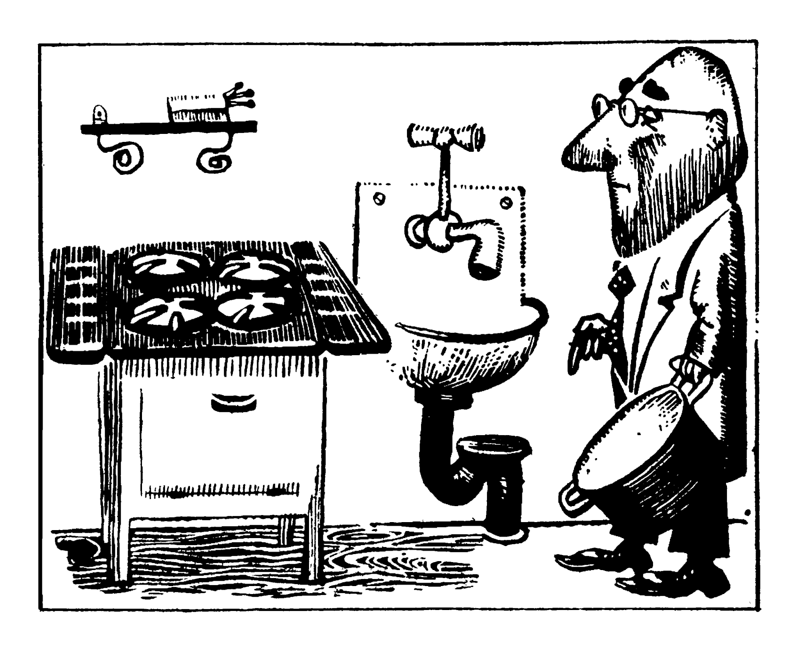
Если бы не все числа, с которыми нам пришлось иметь здесь дело, делились на 3 или если бы коэффициент при x был нечетным числом, то у нас появились бы дроби.

Этими вопросами мы не будем здесь заниматься; впрочем, вопросы эти не порождают никаких дополнительных трудностей. Поэтому в каждом отдельном случае мы можем произвести дополнение до полного квадрата и получить уравнение в том виде, который нам уже знаком и которое мы умеем решать.

Такого рода действия характерны для математических методов мышления. Очень часто математик не принимается тотчас разрешать поставленную перед ним проблему, а преобразовывает и обминает ее до тех пор, пока не сведет к задаче, решенной им уже ранее. Очевидно, мы снова возвращаемся к тому, о чем уже говорили: удобство в расчетах!

Карикатурное изображение такого способа мыслить дает следующая загадка, хорошо известная в среде математиков: «Тебе даются в твоем собственном доме газовая плитка, вода в кране, коробок спичек и кастрюля. Требуется вскипятить воду. Как ты это сделаешь?»

Ответ обычно дается тоном не совсем уверенным: «Зажгу газ, налью в кастрюлю воды и поставлю на



плитку».— «Хорошо, а теперь несколько изменим условия задачи. Допустим, все так же, как и раньше, с той только разницей, что в кастрюлю уже налита вода. Что ты будешь делать в таком случае?» Спрашиваемый уже куда более уверен в себе и смело отвечает: «Я зажигаю огонь и ставлю на него кастрюлю!»

И тогда он неожиданно слышит: «Так поступает физик! Математик же выливает воду и говорит, что задача сводится к предыдущей».

Именно это сведéние к уже известному и является основой решения уравнений второй степени, а не формулы, которые появляются уже затем и которые каждый ученик так прочно вбивает в свою прилежную голову, что спустя много лет после экзаменов на аттестат зрелости может отбарабанить их даже во сне.

Оказывается, здесь есть еще одна трудность. Допустим, нам удалось дополнить левую сторону до

полного квадрата. Однако не находится ни одного числа, которое, будучи возведенным во вторую степень, дало бы число, стоящее в уравнении справа, например:

$$(x+3)^2=2.$$

В самом деле, если мы представим себе какое-то число и заменим этим числом x, то никогда не сможем получить результат, записанный выше. Однако с уравнениями такого рода нам приходится то и дело сталкиваться, причем часто на практике. Здесь перед нами возникают проблемы, связанные с обращением действия «возведение в степень»: мы ищем число, которое, будучи возведено в квадрат, дает 2. Это задача извлечения корня, и мы к ней вернемся еще — как к обратному действию — в одном из следующих разделов. (Там же мы займемся вопросом, сколько решений имеет уравнение второй степени; пока же утешимся тем, что нам вообще удалось отыскать какое-то решение.) Чтобы успокоить читателя, я скажу только, что проблему эту удается разрешить.

Тот читатель, который опирается не на формулы, а понимает суть дела, может без труда решать также некоторые уравнения более высоких степеней. Пусть, например, нам дано уравнение:

$$(x+1)^3=27.$$

Так как $27=3\cdot3\cdot3=x^3$, 3 и будет тем самым числом, куб которого дает 27. А так как

$$x+1=3,$$

то легко получить решение нашего уравнения:

$$x=2.$$

Выражение $(x+1)^3$ можно разложить также на основе уже известной нам формулы бинома. Разложив $(x+1)^3$, можно снова исходить из того, что все выражение в целом получилось в результате возведения в куб суммы двух выражений. Однако же не для каждого уравнения третьей степени удается про-

вести дополнение до полного куба. Несмотря на это, существует общий метод решения уравнений третьей и четвертой степени.

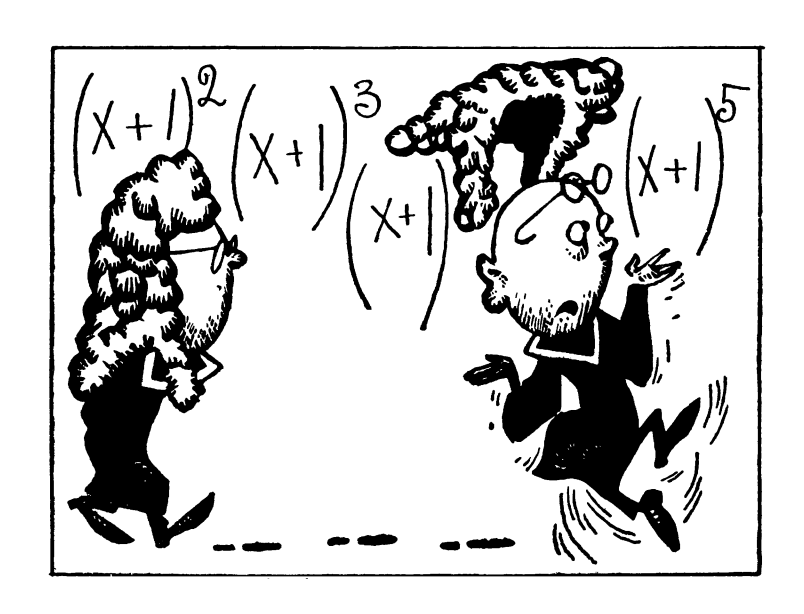
При этом, кроме четырех арифметических действий и извлечений квадратного корня, нужно извлекать еще корни третьей и четвертой степени, то есть нужно искать числа, куб или четвертая степень которых равна данному числу, например 2.

Тот раздел математики, который занимается уравнениями, носит название алгебры. В школе называют алгеброй все то, что не относится к геометрии. Во всяком случае, верно, что во всех разделах математики — даже в геометрии — на каждом шагу появляются уравнения. И у школьников возникает представление, что вся математика есть не что иное, как наука об уравнениях, а поэтому, вероятно, высшая математика — это наука о самых сложных уравнениях. Действительно, был такой период, когда внимание всех математиков было сосредоточено на алгебре. Развитие математики в этой области представляли себе так, что, управившись с уравнениями третьей и четвертой степени, математики отыщут ловкие способы находить общие решения уравнений пятой, шестой — словом, любой степени.

Неразрешимость уравнения пятой степени

Легко себе представить, каким потрясением оказалось известие, что математик Абель нашел условие, при котором можно отыскивать общим методом решения уравнений произвольной степени с помощью четырех арифметических действий и извлечения корня, и что, как затем оказалось, этому условию удовлетворяют только уравнения первой, второй, третьей и четвертой степени. Следовательно, нечего и мечтать, что с помощью наших действий можно будет решить общее уравнение пятой степени. Казалось, что алгебраистам в пору менять профессию.

И здесь мы подходим к самому романтическому эпизоду в истории математики. Случилось так, что некий двадцатилетний француз по имени Галуа ввязался в дуэль из-за девушки и был на этой дуэли



убит. Накануне смерти он написал письмо другу и в этом письме-завещании изложил свои идеи, которые повели алгебру, казалось бы потерявшую опору, к новому расцвету.

Хотя нет общего способа решения уравнений пятой степени, все же некоторые из этих уравнений мы можем решать. Например, уравнение

$$x^5=32,$$

а также уравнение

$$(x+1)^5=32.$$

Мы имеем $32=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^5$. Решением первого уравнения будет, таким образом,

$$x=2,$$

решением же второго уравнения, в котором $x+1=2$, будет

$$x=1.$$

Уравнения другого вида могут быть также разреше-

ны. Рассмотрим еще один из множества возможных примеров. Решением уравнения

$$x^5+2x^4+x=0$$

будет, очевидно, $x=0$, потому что каждая степень 0 и каждое произведение 0 на какое-либо число снова равно 0, и поэтому $0^5+2\cdot 0^4+0$ действительно равно 0.

Таким образом, открываются новые просторы для алгебраических исследований.

Хотя мы не можем еще говорить об общих методах решения, остается еще сказать об очень любопытной задаче: какие уравнения высших степеней могут быть решены при помощи наших действий. Завещание Галуа дает способ решения этой задачи.

Теория Галуа

Метод Галуа оказался необыкновенно плодотворным. Именно благодаря ему алгебра, которой грозил полный упадок, расцвела вновь пышнее прежнего. Там, где математика была ранена, ее организм собрал все силы — и наступило излечение. Новая ветвь алгебры хранит память о Галуа в самом своем названии: она называется *теорией* Галуа.

И вот еще на что хотелось бы обратить ваше внимание, читатель. В алгебре мы впервые столкнулись с тем, что математика в состоянии доказать, пользуясь своими собственными средствами, свою собственную ограниченность в какой-то определенной области. С этим мы встретимся еще не раз.



СОЗИДАЮЩАЯ ФОРМА

9. Разбегающиеся числа

В предыдущих разделах мы ухитрились накопить уйму долгов. Все они в большей или меньшей степени относятся к обратным действиям. Пришло время ближе присмотреться к обратным действиям.

Вычитание выглядит еще вполне невинным. В чем здесь, собственно, дело? Сложение можно обратить следующим образом: я знаю сумму двух слагаемых, например 10, и знаю одно из слагаемых, например 6. Каково второе слагаемое? Очевидно, речь идет о числе 4, потому что именно это число мы получим, если отнимем от 10 известное нам слагаемое 6. В чем же здесь кроется трудность?

Отрицательные числа

Трудности начинаются с того, что мне следовало немного подумать, прежде чем давать в качестве примера числа 10 и 6. В случае сложения можно выбирать наугад два «места» из последовательности натуральных чисел. Нет сомнений в том, что числа эти можно будет просуммировать, да к тому же еще в произвольном порядке.

Что бы, однако, получилось, сформулируй я свой пример так: сумма двух слагаемых равна 6, а одно слагаемое равно 10; чему равно второе слагаемое?

Сразу видно, что требования задачи не могут быть выполнены. Сумма не может быть меньше одного из слагаемых. Таким образом, мы всегда должны смотреть за тем, чтобы вычитаемое было меньше уменьшаемого.

И это все?

Читатель, вероятно, подумал с досадой, что не стоило возиться так долго с такой ерундой. Никому не придет в голову отнимать больше того, что было вначале, а все другие «нормальные» вычитания можно производить без всякого затруднения.

Как будто бы это правда. И однако, существуют случаи, когда задача вычитания большего числа из меньшего попросту навязывается сама.

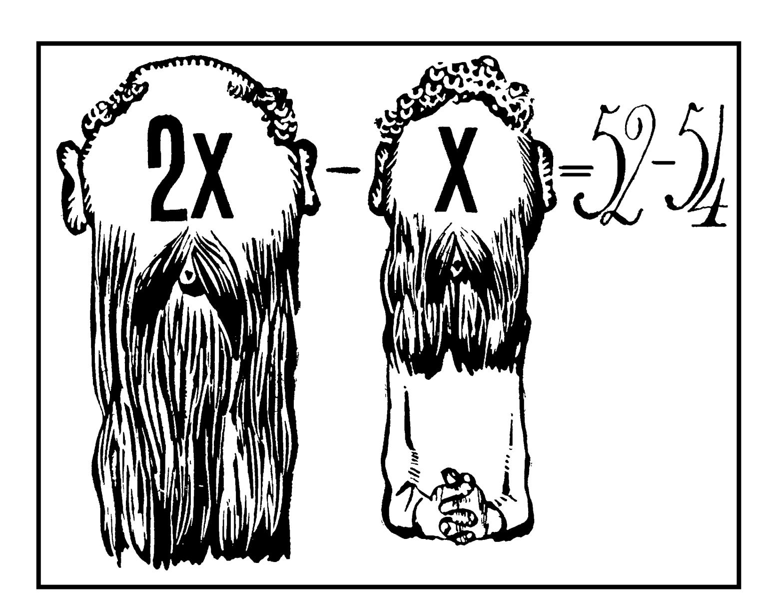
Вспомним уже знакомое нам уравнение, из которого можно было найти разгадку, — через сколько лет отец будет вдвое старше сына.

Поставим теперь тот же самый вопрос для того случая, когда отцу 52 года, а сыну — 27. Рассуждаем мы при этом точно так же, как и раньше: нужное нам событие наступит через x лет. Отцу будет $52+x$ лет, а сыну будет $27+x$ лет; при этом мы утверждаем, что

$$52+x=2\cdot(27+x).$$

Поступаем уже известным нам образом: справа умножаем оба слагаемых на 2:

$$52+x=54+2x.$$



Соберем теперь неизвестные справа; для этого x, находящийся слева, перенесем — уже как вычитаемое — в правую сторону, 54 же перенесем — тоже как вычитаемое — влево:

$$52-54=2x-x.$$

Здесь-то мы и увязаем; нужное нам число должно иметь ту же величину, что и результат вычитания 52—54; а вычитание это мы проделать не можем!

Таким образом, сам собой напрашивается вывод: поскольку неизвестное может быть только результатом вычитания 52—54, то мы должны искать ошибку в самой формулировке задачи; этот отец никогда не будет в два раза старше своего сына.

Присмотримся, однако, повнимательней к числам, выражающим возраст отца и сына: 52 и 27. Кто способен считать, тот заметит, что двумя годами раньше отцу было 50 лет, а сыну было 25. И именно тогда отец был в два раза старше сына.

Поэтому видно, что нужно только несколько иначе сформулировать задачу: сколько лет прошло с тех пор, как отец был вдвое старше сына?

Теперь уже не будет никаких хлопот с решением. X лет назад возраст каждого из них был меньше на x лет, и, таким образом, отцу было $52-x$ лет, а сыну $27-x$ лет. Мы утверждаем, что

$$52-x=2\cdot(27-x).$$

Разность справа мы снова можем помножить на 2, умножая на 2 отдельно 27 и x:

$$52-x=54-2x.$$

(Если бы, например, нам нужно было посчитать произведение $2\cdot 99$, то проще всего мы могли бы сделать это, умножая на 2 вместо числа 99 число 100 и затем, отняв от полученного результата 2. Число 99 мы при этом рассматриваем как разность $100-1$, и поэтому его удвоение мы ищем в виде разности $2\cdot 100-2\cdot 1$.)

Теперь соберем неизвестные в левую сторону, то есть перенесем вычитаемое $2x$ влево — уже как слагаемое:

$$2x+52-x=54.$$

Затем перенесем слагаемое 52 — уже как вычитаемое — вправо:

$$2x-x=54-52.$$

Теперь можно спокойно выполнить вычитание и справа и слева:

$$x=2.$$

И таким образом мы получаем результат, которого ожидали.

Однако же это решение мы отыскали с немалым трудом. Мы шли старой дорогой, пока не наткнулись на препятствие. Тогда нам пришлось вернуться, иначе сформулировать задачу и — начать все сызнова. А ведь решение уже было в наших руках. Вернемся на то место нашего пути, где мы остановились.

Разность

$$52-54$$

разве что не кричит нам: «Я же говорю, что разница равна двум! Более того, я вам говорю, что эти два года нужно искать в противоположном направлении, не в будущем, а в прошлом. Почему вы не хотите этого понять, глядя на меня?»

Таким образом, все говорит за то, чтобы придать смысл разности 52—54 и считать ее чем-то, что равно по величине разности 54—52, но имеет определенное направление, обратное общепринятому. Это направление ведет в прошлое и показывает, что нужно отнять от нынешнего возраста 2 года; поэтому мы обозначаем его символом вычитания. Таким образом,

$$52-54=-2.$$

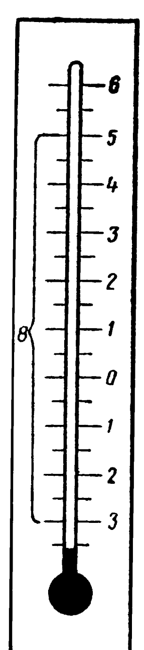
Все числа, с которыми мы до сей поры имели дело, следовало бы, таким образом, наделить знаком «+», то есть если бы результат нашего уравнения означал, что нужная нам ситуация наступит через 2 года, то к нынешнему возрасту нужно было бы прибавить 2 года. Если бы нам нужно было специально это подчеркнуть, мы бы и приписали знак «+».

Это не единственный случай, когда мы какому-то числу приписываем определенное направление. Когда, например, мы в зимний день говорим, что тер-

мометр показывает 4 градуса, то тем самым еще не дается исчерпывающей информации о температуре воздуха. Нужно еще добавить, что речь здесь идет о 4 градусах выше нуля или ниже нуля. Для тех, кто скверно переносит холод, это достаточно существенная разница!

Подобную неточность мы допускаем, говоря о III веке, не разъясняя, идет ли речь о III веке нашей эры или же о III веке до нашей эры; или же говоря о 15° географической долготы, не уточняя, следует ли брать 15° восточнее или западнее нулевого земного меридиана. Бухгалтер также должен хорошо знать, находится сумма в 1000 рублей справа или слева от средней линии его книги, потому что для подавляющего большинства людей вовсе не безразлично, увеличится или уменьшится их состояние на такую сумму.

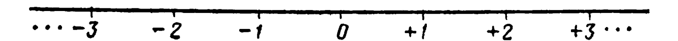
Во всех этих случаях противоположно направленные величины можно снабдить знаками «+» и «—» и дать им разные названия. Величины, снабженные знаками «+», мы называем положительными; величины, снабженные знаками «—», называем отрицательными. Каждое отрицательное число можно рассматривать как результат какого-то вычитания, когда мы от меньшего положительного числа отнимаем большее положительное число.



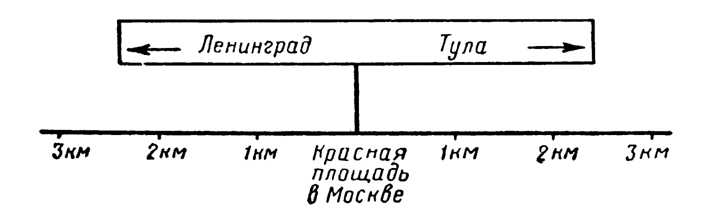
Если, например, термометр показывает 5 градусов выше 0 и температура упала на 8 градусов, то такое понижение температуры мы склонны выразить при помощи вычитания. Ничто не мешает нам уменьшить температуру от 5 до 8 градусов: для этого мы должны только перескочить через 0 градусов, и в результате получится 3 градуса ниже 0, то есть —3 градуса: 5—8=—3.

Такое вычитание уводит всегда за 0, в противоположном направлении. Если, таким образом, мы хотим изобразить на

нашей числовой прямой величины, снабженные направлением, то мы должны откладывать положительные величины в одном направлении (обычно направо), а отрицательные числа — в противоположную сторону:



Эту числовую прямую мы можем теперь также считать одним из примеров разнонаправленных величин, нужно только представить себе ее в виде дороги с дорожным указателем в нулевой точке.

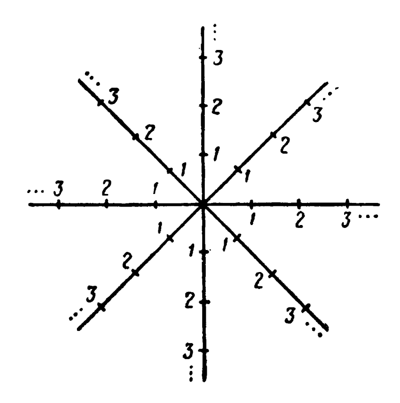


Бывают также случаи, когда нас интересует безотносительное, абсолютное значение числа, а вовсе не его направление. Например, когда мы хотим узнать, каково расстояние между двумя точками. Так, длина змеи — три метра, без всякого знака. Никто не будет всерьез утверждать, что ее длина равна 3 метрам от головы до хвоста и три от хвоста до головы, то есть всего 6 метров.

Собственно говоря, и без этого следовало ожидать, что в математике существуют противопоставления. Пары, противоречивые по самой природе своей, очень характерны для человеческого мышления: да и нет, тень и свет, тезис и антитезис.

Но тонкий ум улавливает не только столь резкие контрасты: существуют бесчисленные переходы от света к тени. Из данной точки мы можем уйти не только в одном из двух направлений. Уходящие

из Москвы дороги ведут во все стороны света. Так что нам нужно было бы дополнить, «усовершенствовать» полупрямую, на которой изображаются нату-



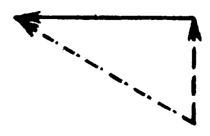
ральные числа, не только ее «противопоставлением», но также и многими путями, выходящими, словно лучи, из нулевой точки.

Векторы

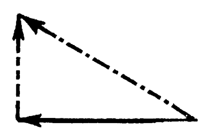
Это не просто плоды воображения. Величины, направленные произвольно, так называемые в е к т о р ы, играют важную роль в физике: движение может происходить в любом направлении, сила может действовать в любом направлении. Есть вполне определенный смысл в проведении вычислений с такими направленными величинами — например, когда две силы действуют одновременно и мы хотим узнать направление их совместного действия. Каждый гребец знает, что, переплывая реку, он пристает к противоположному берегу не напротив точки отплытия, а дальше вдоль реки, потому что независимо от движений весел лодку относит также и течением.

В стоячей воде лодка двигалась бы вдоль пунктирной линии, а течение реки в то же самое время унесло бы неподвижную лодку вдоль жирной линии.

Под влиянием обеих причин — и усилий гребца и действия течения — лодка движется по линии с точками и таким образом достигает того самого места, к которому лодка пристала бы, пройдя один за другим пути, указанные и пунктирной и жирной линиями:



или же, в обратной последовательности

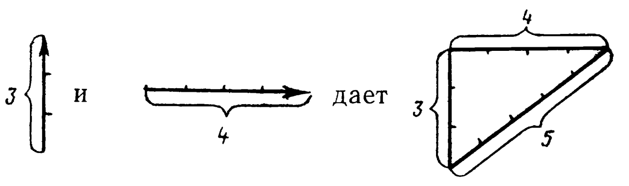


Независимо от выбранной последовательности лодка оказалась бы в одной и той же точке; следовательно, и при такого рода сложении можно изменять порядок слагаемых.

Сложение векторов можно и далее рассматривать как какое-то исчисление. Единицы первого слагаемого мы отсчитываем в направлении ↑ , затем добавляем к ним единицы другого слагаемого в направле-

нии ← и смотрим, какой вектор приведет нас прямо в то место, в котором мы очутились. Этот вектор и будет результатом всего действия, или, как мы говорим, суммой двух векторов.

Но это особенное сложение. Сумма



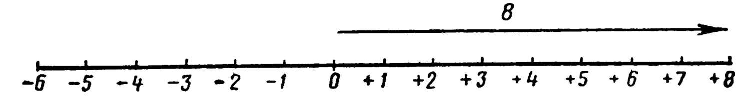
и, таким образом, точно измерив, мы получаем 5 единиц. На первый взгляд может показаться, что мы пришли к нелепому выводу:

$$3+4=5.$$

Однако никто не давал нам права выражаться столь неточно, и мы должны доскональнейшим образом зафиксировать, какое направление имеет это число 3, это число 4 и это число 5; тогда мы не будем оказываться в столь нелепом положении, получая результат, меньший 3+4=7. Сумма сил, противоположно направленных, может даже оказаться равной нулю: есть старая сказка о дураках, которые решили в запряженную четверкой коней карету впрячь еще четырех коней, однако сколько они ни старались, карета не сдвинулась с места; причина в том, что новая четверка коней была запряжена с другого конца кареты и противодействовала первой четверке.

Мы не будем рассматривать больше числа, разбегающиеся во все стороны; остановимся только на двух противоположных направлениях.

Мы уже говорили о том, как складываются и вычитаются положительные и отрицательные числа на числовой оси. Если, например, нужно прибавить —5 к +8, то сначала мы отсчитываем от 0 вправо 8 единиц:



А затем от этого места отсчитываем 5 единиц влево

5

−6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

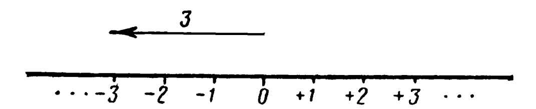
и получаем немедленно +3. Таким образом, сумма +8 и —5 равна +3.

Постараемся на будущее запомнить, что

$$8+(-5)=3=8-5.$$

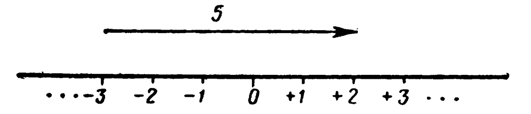
Таким образом, вместо сложения с отрицательным числом мы можем также произвести самое обыкновенное вычитание.

Вычитание также не составит на нашей числовой прямой никакого труда, если мы проведем упомянутое вычисление в обратном порядке. Отнимем, например, —3 от +2. Это значит, что результат сложения равен +2. Одно из слагаемых равно —3, а второе слагаемое мы должны отыскать. Сложение началось с того, что мы отправились от 0 на 3 единицы влево:



Теперь мы задаем вопрос: что нужно сделать, чтобы очутиться в точке, соответствующей числу +2?

Чтобы перебраться из —3 в +2, нужно отсчитать 5 единиц вправо:



И поэтому разность чисел +2 и —3 равна также +5. Вот это да! Мы пришли к тому же самому результату, как если бы мы прибавляли к числу +2 число +3. И так всегда. Вместо того чтобы вычитать,

в каждом отдельном случае можно производить сложение, но сложение с числом противоположного знака.

Теперь будем рассуждать так: поскольку мы уже в состоянии складывать отрицательные числа, то с умножением дело пойдет также очень просто. Трижды взять число —2 — значит произвести такое сложение:

$$(-2)+(-2)+(-2).$$

От числа —2 отсчитываем влево две единицы, затем еще две единицы и таким образом доходим до числа —6:

$$(+3)\cdot(-2)=-6.$$

Однако же что делать, если множимое имеет отрицательный знак? Числа можно складывать двукратно, трехкратно, четырехкратно, но какой может иметь смысл «(—2)-кратное» сложение одного и того же числа! Однако у нас уже накопился определенный опыт. И мы не поддадимся соблазну легкомыслия, не рассудим так: если что-то не имеет смысла — не будем этого делать. Мы уже ввели отрицательные числа, благодаря которым нам не нужно порознь рассматривать два случая, а можно действовать каким-то единым способом. При умножении дело обстоит точно так же. Если у нас есть задачи, которые можно решить в области положительных чисел при помощи умножения, то было бы невыгодно постоянно выделять какие-то случаи и говорить: в случае положительных данных мы должны умножать, а в случае отрицательных данных — делать что-то другое. Присмотримся повнимательней, чем является это «иное», которое вступает здесь в игру. Это мы и будем считать умножением отрицательных чисел. По сути дела, мы имеем на это полное право. Чему-то, что доселе не имело никакого смысла, можно придать угодное нам значение.

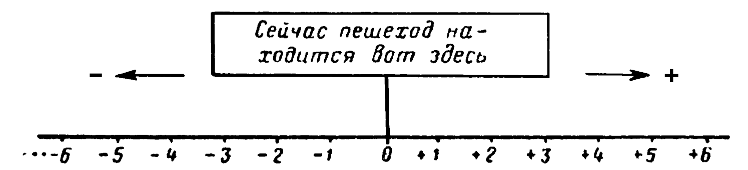
Пример скажет нам больше, чем многословное объяснение.

Кто-то прогуливается, не меняя темпа, делая по 3 километра в час. Какой путь пройдет он через два

часа? Ответ на это дает, очевидно, умножение. За один час гуляющий пройдет 3 километра, значит, за 2 часа он пройдет $2 \cdot 3 = 6$ километров. Таким образом, путь мы получаем, умножая время прогулки на скорость пешехода.

Поставим теперь вопрос таким образом, чтобы и путь, и время, и скорость были направленными величинами. На пути находится точка — будем ее называть «здесь», — и мы считаем прогулку положительной, если герой нашей задачи движется вправо, и отрицательной, если он движется влево от точки «здесь». Если скорость 3 километра в час направлена вправо, то мы говорим, что пешеход движется со скоростью +3 километра в час, если же влево, то мы говорим, что он движется со скоростью —3 километра в час. Наконец, выберем какой-то момент — будем его называть «сейчас» — и время, которое наступит позже, считаем положительным, а время, которое успело пройти до этого момента, — отрицательным.

Точку выхода на прогулку мы определим предложением: «Сейчас пешеход находится вот здесь».



Займемся двумя интересующими нас отдельными случаями.

1. Скорость пешехода равна 3 километрам в час; сейчас он вот здесь. Где он был два часа назад? То, что мы получаем, нужно будет считать результатом умножения

$$(-2) \cdot (+3).$$

Остановимся. Скорость пешехода положительная, поэтому он идет вправо. Сейчас он находится здесь (посмотрите на наш рисунок). Два часа назад он должен был, таким образом, быть слева от указа-

теля; причем находился он от указателя на расстоянии, равном длине пути, который можно пройти за два часа, то есть на расстоянии $2 \cdot 3 = 6$ километров. Однако на расстоянии 6 километров от указателя мы обнаруживаем —6. Таким образом:

$$(-2) \cdot (+3) = -6.$$

Итак, если мы умножаем положительное число на отрицательное, то получаем отрицательный результат.

2. Пусть скорость равна —3 километрам в час. Сейчас пешеход находится вот здесь. Где он был двумя часами раньше? То, что мы получаем, следует считать результатом умножения

$$(-2) \cdot (-3).$$

Отрицательная скорость означает, что пешеход идет влево; сейчас он находится здесь (снова взгляните на наш рисунок). Это, однако, возможно лишь в том случае, когда двумя часами раньше пешеход был направо от указателя; и был он снова на расстоянии 6 километров. Однако же на расстоянии 6 километров вправо от указателя мы видим +6. Поэтому

$$(-2) \cdot (-3) = +6.$$

Таким образом, произведение двух отрицательных чисел является положительным числом.

Точно так же происходит и с двойным отрицанием. «Неправда, что я не слушал внимательно» означает «На самом деле я слушал внимательно».

Из правила знаков для умножения мы можем тотчас «усмотреть» правила знаков для деления. Например, деление $(+6) : (-3)$ означает, что мы ищем число, которое, будучи помноженным на (-3), даст нам +6. Этим числом, очевидно, будет —2.

А вот как выглядит правило знаков для возведения в степень:

$$(-2)^4 = \underline{(-2) \cdot (-2)} \cdot \underline{(-2) \cdot (-2)} = (+4) \cdot (+4) = +16,$$

а

$$(-2)^5 = \underline{(-2)\cdot(-2)}\cdot\underline{(-2)\cdot(-2)}\cdot(-2) =$$
$$= \underline{(+4)\cdot(+4)}\cdot(-2) = (+16)\cdot(-2) = -32.$$

Всегда отрицательные сомножители, выступающие парами, дают положительные произведения, и дело все оказывается в том, остается ли после разбиения на пары сомножитель-«одиночка» или нет. Поэтому четные степени отрицательного числа всегда положительны, а нечетные — отрицательны.

Расширение понятия умножения мы рассмотрели на одном частном примере. Могли бы возникнуть сомнения: не приведут ли нас другие частные случаи к другим правилам? Полностью нас успокоит только установление того факта, что наши новые правила умножения удовлетворяют всем правилам, которые мы установили для умножения натуральных чисел. Поэтому мы можем пользоваться новыми правилами, не боясь впасть в противоречие со всей нашей «предшествующей» математикой. Например, остается справедливым тот факт, что мы можем менять порядок сомножителей. Мы уже видели (и могли это вывести также при помощи примера с пешеходом), что

$$(-2) + (-2) + (-2) = -6,$$

то есть

$$(+3)\cdot(-2) = -6.$$

Рассматривая пример с пешеходом, мы получили, что

$$(-2)\cdot(+3) = -6.$$

И поэтому

$$(+3)\cdot(-2) = (-2)\cdot(+3).$$

Принцип непрерывности

Когда мы вводим новые числа или новые операции, то всегда нужно очень внимательно проверить и твердо убедиться в том, что не нарушилась справедливость ранее использовавшихся правил, —

ведь мы же стремимся получить единые методы. Эта осторожность при расширении старых понятий называется принципом непрерывности (перманентности).

Последовательность натуральных чисел возникла самопроизвольно, без посторонних внешних воздействий. Перебои вначале хорошо работавшего механизма побудили человека сознательно открывать новые числа. С помощью этих чисел перед человеком раскрылась форма. Для того чтобы оперировать новыми числами, потребовались жесткие рамки. Рамки эти были очерчены при помощи правил, ранее установленных для «старых» чисел; от этих правил мы стараемся отойти как можно меньше. Такой подход к делу указывает нам направление сознательного творчества: новые числа нужно формировать так, чтобы они хорошо соотносились с уже готовыми формами. А ведь слово, как говорит Гёте, также является формой мысли:

...Едва понятий станет не хватать,
Как слово явится — достаточно позвать.

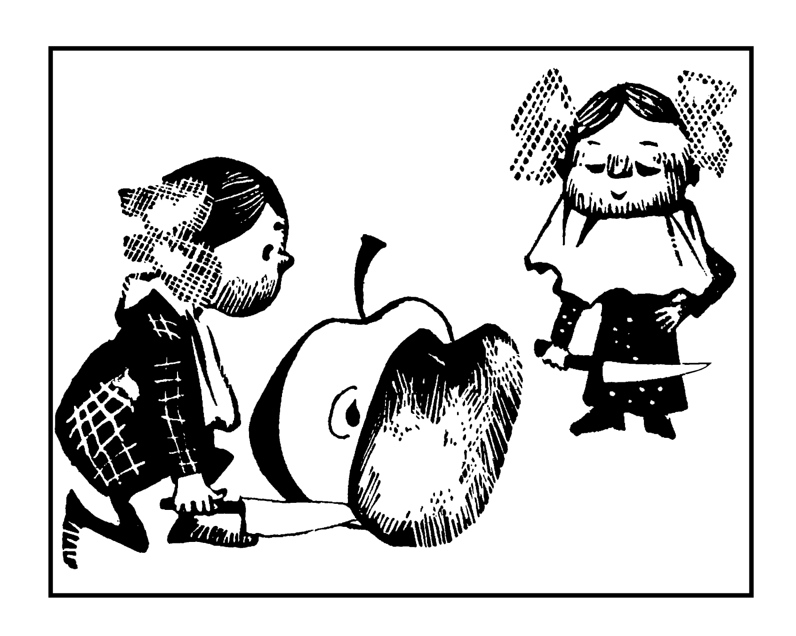
10. Неограниченная плотность

Действия с дробями

Чтобы обнаружить новую проблему, не надо уравнений. Даже самому маленькому ребенку приходится сталкиваться с делением такого рода, которое не может быть произведено в области натуральных чисел. Двое детей хотят поделить между собой яблоко. Они примиряются с тем, что ни один из них не получит яблоко целиком, и, недолго думая, делят яблоко пополам (см. рис. на стр. 129).

И конечно, им даже в голову не приходит, что они тем самым пришли к новому расширению понятия «число».

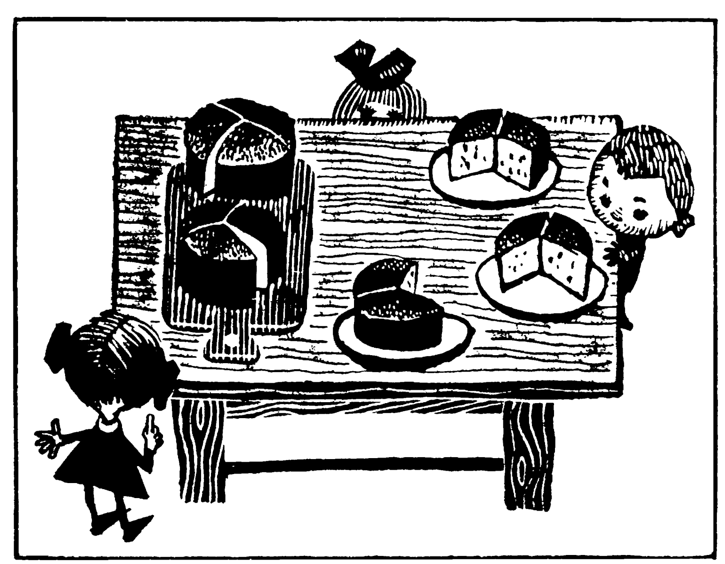
До сей поры мы смотрели на единицу как на нечто неделимое. Теперь же введем ее половину в качестве новой, меньшей единицы. Сделав этот первый смелый шаг, мы можем уже без всякого страха



поделить целые также на 3, на 4, на 5, ... — словом, на какое угодно число частей; затем мы можем отсчитывать эти только что полученные нами новые маленькие величины: например, две половины, три половины, четыре половины и так далее, или же, записывая цифрами:

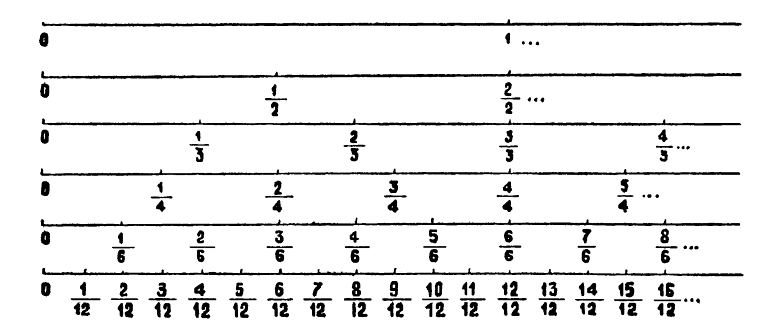
$$\frac{2}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{2};\ \ldots .$$

Эти обозначения не противоречат тому факту, что до сих пор дробная черта означала деление. Если мы хотим, например, поделить 2 на 3, или — если говорить более конкретно — если трое детей хотят разделить между собой два торта, то лучше всего можно это сделать, деля каждый торт на 3 равные части. Тогда каждый из троих детей получит две трети, то есть $\frac{2}{3}$ торта.



Число под чертой обозначает *имя, название* единицы, о которой идет речь; это знаменатель, он показывает, знаменует. Число над чертой дроби *подсчитывает, исчисляет*, сколько взято таких единиц; это числитель.

Таким образом, наша числовая прямая как бы размножается. Можно образовывать все новые и новые числовые прямые со все меньшими и меньшими единицами. Вот некоторые из них:



Среди величин, отложенных на разных линиях, есть одинаковые. Достаточно посмотреть, какие величины находятся точно друг под другом. Например,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{6}{12} \text{ или } \frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12},$$

и отсюда легко понять, какие изменения, по сути дела, не меняют значения дроби. Например, $\frac{4}{6}$ равно более простой дроби $\frac{2}{3}$, то есть $\frac{4}{6}$ можно «сократить» до вида $\frac{2}{3}$. Сделать это мы можем, поделив на 2 одновременно числитель и знаменатель: $4:2=2$, $6:2=3$; $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Это само собой понятно. Каждый из вас сам легко убедится в том, что одна треть в два раза больше одной шестой и что мы получаем один и от же результат, взяв в два раза больше в два раза меньших кусочков.

Мы видим также, что, например, $\frac{3}{3}$ равно целой единице, а $\frac{4}{3}$ — целой единице и $\frac{1}{3}$ (коротко мы это записываем как $1\frac{1}{3}$). Такие дроби собственно дробями не являются, потому что их значение не является частью целого. Они называются неправильными дробями.

Совершенно ясно, что наши новые величины, лежащие на одной прямой, мы можем складывать и вычитать, пользуясь обычными правилами счета. Если, например, к $\frac{3}{4}$ мы добавим еще две четвертые части, то получим $\frac{5}{4}$, так что

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}.$$

То же самое относится и к умножению на целое число:

$$2\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}+\frac{5}{12},$$

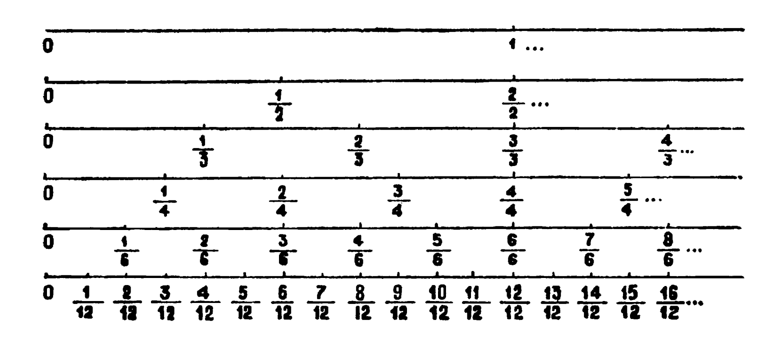
и если к $\frac{5}{12}$ мы добавим еще 5 двенадцатых частей, то «дойдем» по прямой до $\frac{10}{12}$.

Некоторая трудность появляется в том случае, когда мы хотим сложить два числа, состоящие из разных долей, например:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}.$$

Здесь можно воспользоваться таким приемом. Ищем ближайшую прямую, на которой находятся как число, равное $\frac{2}{3}$, так и число, равное $\frac{3}{4}$ (нетрудно сообразить, что такая прямая всегда существует). В нашем случае это будет прямая, соответствующая двенадцатым долям. Отыскиваем на ней

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \text{ а также } \frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$



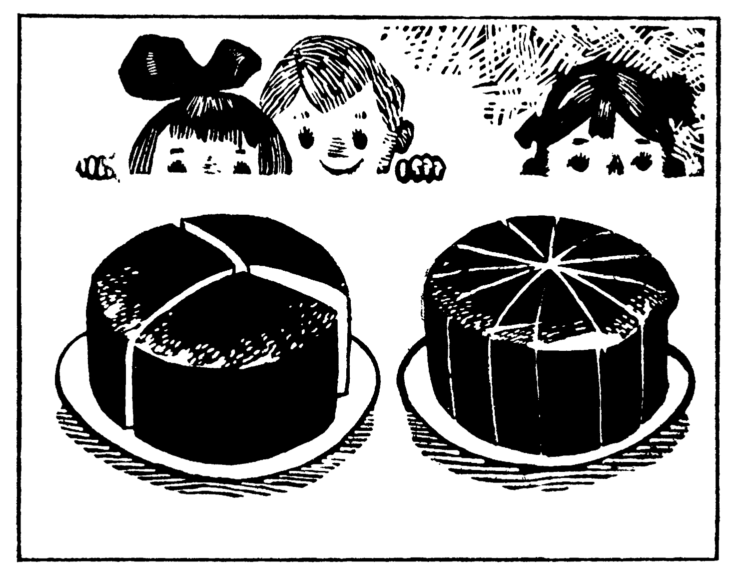
и теперь уже легко можно произвести сложение

$$\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$$

на одной числовой прямой.

Точно так же нужно переходить на другую чис-

ловую прямую в случае деления[1]. Прошу вас посчитать и убедиться в том, что половина $\frac{1}{2}$ равна $\frac{1}{4}$, а четвертая часть $\frac{2}{3}$ равна $\frac{2}{12}$. Нет ничего удивительного во всем этом, потому что в четыре раза больший знаменатель означает, что целое делится на число частей, в четыре раза превышающее первоначальное, и полученных таким образом частей берется столько же, сколько и в первый раз, когда мы имели дело с частями, в четыре раза большими. Поэтому-то и должен получиться в четыре раза меньший результат, например, в случае, когда делится торт:



Таким образом, мы видим, что, применив к дроби какую-либо из указанных операций, в результате

[1] Вспоминается, что электроны при электронной эмиссии перескакивают с одной орбиты на другую. Может быть, этот пример из теоретической физики поможет читателю, знакомому с современной теорией атома, составить нужное представление.

снова получаем дробь (правильную или неправильную). И ничего страшного, что приходится играть на разных регистрах нашего органа.

Настоящая проблема возникает снова при умножении дробей. Нет никакого смысла складывать что-то полраза. Один маленький ученик сказал как-то: если один раз получается 3, то $\frac{1}{2}$ раза 3 получается $1\frac{1}{2}$ и в этом был немалый смысл. Нам может помочь повсеместно употребляющееся выражение такого типа: «Петр в $\frac{2}{3}$ раза ниже своего брата»; при этом говорящий хочет сказать, что рост Петра равен $\frac{2}{3}$ роста его брата. И следовательно, взять что-то $\frac{2}{3}$ раза означает, что мы берем не целое, а только две трети этого целого.

Это, по сути дела, такой способ умножения, которым мы пользуемся в следующей задаче. Если килограмм крупы стоит 50 копеек, то 4 килограмма стоят, очевидно, $4 \cdot 50 = 200$ копеек, то есть 2 рубля. Выходит, стоимость крупы мы получаем, умножая цену одного килограмма на число купленных килограммов.

А теперь немного изменим условие задачи. Один килограмм крупы стоит 50 копеек. Сколько стоит $\frac{3}{4}$ килограмма крупы? Получаемый нами результат и можно считать результатом умножения:

$$\frac{3}{4} \cdot 50.$$

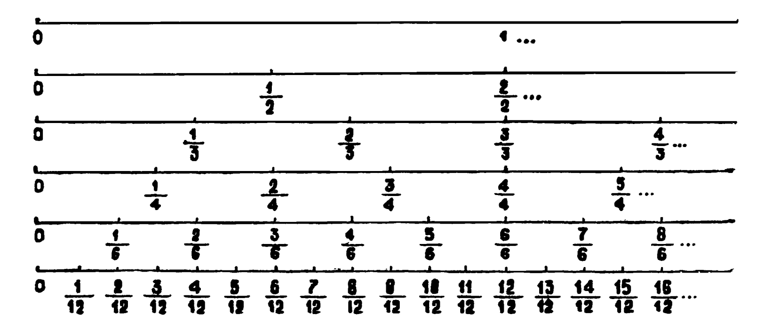
Цену трех четвертей килограмма можно, очевидно, подсчитать, взяв трижды цену четверти килограмма. Цена $\frac{1}{4}$ килограмма равна, очевидно, четвертой части 50 копеек (то есть равна 12,5 копейки). Произведение $\frac{3}{4} \cdot 50$ действительно означает, что мы берем три

четверти от пятидесяти, а результат мы получаем, поделив на 4 и умножая на 3.

Точно такое же рассуждение приводит нас к выводу, что деление на $\frac{3}{4}$ состоит в умножении на 4 и делении на 3. Тогда деление и умножение дают в итоге снова дроби (на каких-то числовых прямых), и можно показать, что при таком расширении понятия умножения остаются неизменными все прежние правила счета. Ничего удивительного, что результат здесь часто оказывается меньше числа, которое мы умножаем. Повторить какое-то число $\frac{2}{3}$ раза — значит взять две трети этого числа. А это, очевидно, должно быть меньше самого числа.

Легко помножить 20 на $\frac{1}{4}$. Нужно попросту взять четвертую часть числа 20, и поэтому результат будет равен 5. Точно так же просто умножение на $\frac{1}{2}$, на $\frac{1}{3}$, на $\frac{1}{5}$, потому что в этих случаях нужно всего-навсего отыскать половину, треть, пятую часть множимого. Поэтому полезно раскладывать дроби на так называемые «простые дроби» с числителем 1. Например:

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{1}{12}.$$



Посмотрим теперь на соответствующие числовые прямые. Мы увидим, что $\frac{4}{12}$ — это то же самое, что и $\frac{1}{3}$. То есть

$$\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}.$$

Однако $\frac{1}{12}$ — это четвертая часть $\frac{1}{3}$ (проверьте сами, не ошибаюсь ли я). Поэтому, например, умножение

$$84\cdot\frac{5}{12}=84\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=35$$

можно выполнить так: сначала берется третья часть 84, то есть 28, а затем еще четвертая часть полученного числа, то есть 7. Сумма 28+7 дает нам число 35.

Такая последовательность — громадное облегчение для англичан, которые в своих единицах измерения сохранили остатки самых разных систем счета. Например, их монета шиллинг делится на 12 пенсов. Так что на каждом шагу приходится производить деление на 12 частей.

Оказывается, что любое из наших основных действий можно также выполнить в области дробей. Рассмотрим еще один пример. Пусть кто-то решает математические задачи. Самая легкая отнимает у него $\frac{1}{3}$ часа (20 минут), а над самой трудной приходится ломать голову $\frac{1}{2}$ часа (30 минут). Сколько нужно времени в среднем для решения одной задачи?

Самая легкая и самая трудная задачи отнимают вместе

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

часа. Если бы эти задачи были одинаково трудными, то на каждую из них пришлось бы потратить половину времени, выраженного этой суммой. Видимо,

столько же пришлось бы сидеть над решением задачи средней трудности. Отыщем это время.

На прямой, предназначенной для откладывания шестых долей, найдем как число, совпадающее с $\frac{1}{3}$, так и число, совпадающее с $\frac{1}{2}$.

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \text{ и } \frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому сумма $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равна

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}.$$

А половина этой величины равняется

$$\frac{5}{12}$$

на прямой, предназначенной для двенадцатых долей (убедитесь в этом сами).

Таким образом, для решения задачи средней трудности нужно затратить в среднем $\frac{5}{12}$ часа (25 минут). Это, очевидно, превышает время, необходимое для решения самой легкой задачи, однако меньше того времени, которое затрачивается на решение самой трудной.

Среднее значение любых двух чисел можно отыскать, взяв половину суммы этих чисел. В результате мы всегда получаем число, значение которого лежит посредине между двумя данными значениями. Потому-то математики и называют это число *средним арифметическим*.

Этот невинный результат открывает перед нами ошеломляющие перспективы, стоит лишь пристальнее к нему присмотреться.

Всюду плотное множество

«Сольем» сразу все наши числовые прямые в одну числовую прямую; тем самым мы получаем возможность без всякого труда представлять на одной

числовой прямой любую дробь. Пользоваться несколькими числовыми прямыми нам пришлось для большей ясности. На одной же числовой прямой дроби, имеющие одинаковую величину, «сбегаются» в одну точку; обычно каждую точку мы называем именем той дроби, которая появилась первой:

$$0 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{11}{12} \quad 1 \quad \frac{13}{12} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{19}{12} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{7}{4} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{23}{12} \quad 2$$

Уже здесь наша числовая прямая достаточно густо покрыта числами. Однако не нужно забывать, что мы «слили» лишь некоторые, произвольно выбранные нами числовые прямые. На нашей числовой прямой вовсе нет пятых долей, седьмых долей, десятых долей, сотых долей и бесконечного числа других дробных единиц! Если представить себе, что мы все эти доли приняли во внимание, то соответствующие этим дробям точки лежали бы на числовой прямой невообразимо густо. Попробуем сориентироваться в этой мешанине.

Прежде всего мы видим, что здесь есть целые числа; их можно рассматривать как дроби со знаменателями, равными единице. В самом деле, 3, например, можно представить как результат деления тройки на единицу, то есть $\frac{3}{1}$.

Целые числа и дроби мы называем общим названием рациональные числа (и, разумеется,— ведь мы прошли уже немалый путь и почти научились предвосхищать события,— читатель может догадаться, что существуют также и числа, не являющиеся рациональными).

Какова наименьшая дробь, отличная от 0 (а 0 можно рассматривать как $\frac{0}{2}$; $\frac{0}{3}$; $\frac{0}{4}$ и так далее)? Очевидно, это отнюдь не число $\frac{1}{12}$, потому что уже дробь $\frac{1}{13}$ меньше этого числа; чем больше число частей, на которое мы делим торт, тем меньшие пор-

ции достанутся каждому. Какую бы дробь мы ни взяли, положение всегда будет одно и то же: $\frac{1}{101}$ меньше $\frac{1}{100}$, а $\frac{1}{1001}$ меньше $\frac{1}{1000}$. Таким образом, среди положительных рациональных чисел нет не только наибольшего числа (так же как и среди целых чисел), но также нет и наименьшего числа.

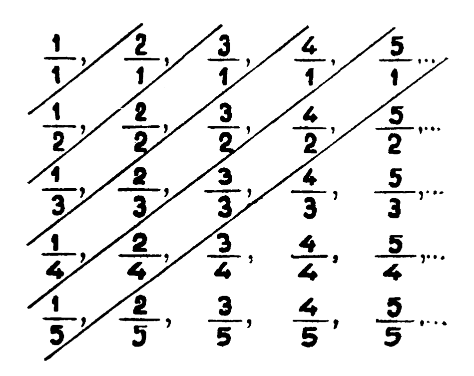
Итак, мы не можем начать отсчитывать рациональные числа, отправляясь от наименьшего числа. В таком случае пускай нашей исходной точкой может быть любая сколь угодно малая дробь; выберем какую-либо дробь и попробуем отыскать все последовательно расположенные рациональные числа, находящиеся правее нашей дроби. Какая дробь непосредственно соседствует с $\frac{1}{12}$? На нашей прямой непосредственно за $\frac{1}{12}$ следует $\frac{1}{6}$, но ведь мы знаем, что среднее арифметическое $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{6}$ лежит между этими двумя дробями и поэтому расположено ближе к $\frac{1}{12}$, нежели $\frac{1}{6}$. Однако же, если мы будем брать какое угодно число, расположенное справа от $\frac{1}{12}$, то всегда в наших силах отыскать среднее арифметическое этого числа и $\frac{1}{12}$, и это среднее арифметическое всегда будет ближе к $\frac{1}{12}$, нежели выбранное нами число. Поэтому можно сделать общий вывод: два любых рациональных числа, которые мы выбираем на числовой прямой, не могут быть непосредственными соседями, как бы близко друг от друга они ни были расположены. Всегда между ними находятся еще и другие рациональные числа. Мы говорим, что множество рациональных чисел всюду *плотное*.

После того как нами уже обнаружено бесконечное возрастание последовательности натуральных и последовательности простых чисел, мы сталкиваемся

с новым «обличьем» бесконечности. На этот раз мы открыли неограниченную густоту, неограниченную плотность. Нет числа настолько большого, чтобы нельзя было в последовательности натуральных чисел либо в последовательности простых чисел отыскать другое, еще большее число. В этом точный смысл того факта, который математики выражают короткой фразой: обе эти последовательности *стремятся к бесконечности*. И в то же время нет числа настолько малого, чтобы не существовало числа, менее удаленного от $\frac{1}{12}$, нежели это число. Мы говорим, что точка $\frac{1}{12}$ является *точкой сгущения* множества рациональных чисел. Очевидно, не только $\frac{1}{12}$, но и всякое другое рациональное число является точкой сгущения этого множества.

И тем не менее все рациональные числа можно представить в виде одной последовательности, хотя и не в соответствии с величиной чисел.

То, что рациональные числа можно представить в виде бесконечного множества числовых последовательностей, мы уже видели, изображая последовательности различных долей на разных числовых прямых. Запишем теперь, чтобы сохранить единообразие, целые числа также в виде дробей:



и так далее. Задача теперь состоит в том, что мы должны все эти числа представить в виде одной последовательности. Этого мы достигаем, выписывая последовательно все числа из «косых рядов» в одну линию. Очевидно, все числа рано или поздно окажутся в нашей последовательности:

$$\underline{\frac{1}{1}},\ \underline{\frac{2}{1},\ \frac{1}{2}},\ \underline{\frac{3}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{3}},\ \underline{\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}},\ \underline{\frac{5}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{5}},\ \ldots$$

С каждым разом появляются все более длинные группы, но всегда каждая группа состоит только из конечного числа многих элементов. Мы действительно получили одну последовательность, и последовательность эту может выписывать дальше всякий, кто понял правило ее построения. Можно делать это, даже не глядя на «косые ряды» выписанной нами таблицы, достаточно заметить только, что сумма числителя и знаменателя одной дроби в первой группе равна 2, у обеих дробей второй группы — равна 3, всех дробей в третьей группе — равна 4, всех дробей в четвертой группе — равна 5 и всех дробей в пятой группе — равна 6. Поскольку

$$7=6+1=5+2=4+3=3+4=2+5=1+6,$$

мы можем построить следующую группу:

$$\frac{6}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{6}.$$

Теперь уже всякий в состоянии чисто механически продолжать выписывание членов нашей последовательности. Мы считаем бесконечную последовательность полностью известной, если, опираясь на закономерности этой последовательности, можно записать любой сколь угодно удаленный ее член.

В нашей последовательности, очевидно, встречаются одинаковые числа; мы видели это уже тогда, когда имели дело с числовыми прямыми. Значит, если мы хотим выписать каждое рациональное число только один раз, то нам нужно дополнить правило по-

строения последовательности примечанием: не записывать дроби, которые можно сократить. Поэтому из выписанной уже нами части последовательности мы должны выбросить $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{4}$, потому что $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{3}$ равны $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{2}$ равняется $\frac{2}{1}$ и $\frac{2}{4}$ равняется $\frac{1}{2}$. Поэтому последовательность рациональных чисел начинается так:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \ldots$$

И можно эту последовательность выписывать дальше, делая это совершенно механически. Следовательно, мы можем указать, каковы первое, второе, третье и так далее выражения последовательности. Выражения мы можем пронумеровать. Поэтому, пользуясь не совсем точным термином, мы говорим, что последовательность *перечислима*.

Мощность множества рациональных чисел

Этот простой факт приводит нас к поразительному выводу: хотя множество рациональных чисел плотно, однако в определенном смысле их столько же, сколько и целых чисел!

Как можно сравнивать бесконечные множества? Сам собой напрашивается простой способ. Если я хочу узнать, одинаковое ли число кавалеров и дам пришло на какой-либо вечер танцев, мне вовсе не нужно специально пересчитывать участников. Достаточно, чтобы кавалеры пригласили дам танцевать. Если ни один кавалер не останется скучать в одиночестве и ни одна дама не будет подпирать стенку, значит, можно быть уверенным, что число кавалеров и дам одинаково. Такой способ сравнения можно перенести и на случай бесконечных множеств. Если элементы двух бесконечных множеств можно построить парами так, что ни один элемент какого-либо множества не останется без партнера, то мы



говорим, что эти два множества имеют одинаковую мощность.

Сопоставим теперь написанную нами выше последовательность рациональных чисел с последовательностью натуральных чисел.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots .$$

Свяжем 1 с первым выражением нашей последовательности, то есть с $\frac{1}{1}$; 2 — со вторым выражением нашей последовательности, то есть с $\frac{2}{3}$; 3 — с $\frac{1}{2}$ и так далее, например, 10 — с десятым выражением нашей последовательности, то есть с $\frac{5}{1}$.

Если я хочу узнать, с каким выражением образует пару число 100, то я могу, пользуясь указанным выше методом, выписать сотое выражение последовательности рациональных чисел, и оно будет парой к 100.

Ясно, что это «построение пар» можно продол-

жать как угодно долго и при этом невозможно, чтобы в последовательности рациональных чисел или в последовательности натуральных чисел какой-то элемент остался без партнера. Поэтому рассмотренные нами множества — множество рациональных чисел и множество натуральных чисел — действительно имеют одинаковую мощность. И это несмотря на то, что целые числа рассыпаны в бесконечно густом множестве рациональных чисел, как изюминки в булке, и «на глаз» представляют собой ничтожное меньшинство.

Здесь мы сталкиваемся снова с чрезвычайно важным фактом. С бесконечностью нужно обходиться крайне деликатно. Существуют люди, которые рассматривают как нерушимый логический принцип то, что часть меньше целого. И вот мы обнаружили пример, ниспровергающий этот принцип.

Натуральные числа представляют собой всего лишь ничтожную часть множества рациональных чисел, и, однако же, их мощность равна мощности рациональных чисел. Дело в том, что общие логические принципы получены путем абстрагирования на основе некоторой суммы наблюдений. Однако всякое наблюдение относится исключительно к тому, что конечно. Возникло уже немало недоразумений и несообразностей оттого, что люди пытались перенести на бесконечность принципы, почерпнутые из конечного мира. Бесконечность взвивается на дыбы и опрокидывает установленные правила.

Если, несмотря ни на что, мы все же не желаем принять тот факт, что часть может оказаться равной целому, то причину такого упорства следует искать в том, что логические принципы опираются не только на опыт, не только на наблюдение, но и на подсознательную уверенность. Утверждение, что часть способна оказаться равной целому, человек может расценить и как покушение на устои естественного порядка вещей. Однако оттого и удается в математике вкусить радость от запретного плода, что из мира суровых правил мы вырываемся в свободную бесконечность.

11. Мы снова ухватываем бесконечность

Вернемся теперь ненадолго из бесконечности в тот самый «наш» мир, который можно пощупать, и вновь задумаемся над тем, что наши руки, которыми мы пытаемся охватить действительный мир, имеют 10 пальцев. Нельзя ли и дроби перевести в десятичную систему?

Замена простых дробей десятичными и обратная замена

Вспомним: слева от собственно единиц мы помещали единицы, в 10 раз большие, то есть десятки, еще левее — единицы, еще в 10 раз большие, то есть сотни, и так далее. Сама собой приходит мысль — нельзя ли распространить эти правила и вправо: справа от единиц мы поместили бы десятые части, рядом — десятые части десятых долей, то есть сотые доли, рядом — тысячные и так далее? Однако мы должны отделить каким-то образом эти новые единицы от собственно единиц, потому что иначе мы не могли бы узнать, например, что в записи

$$12$$

1 означает одну единицу, а 2 — две десятые части. Мы бы решили, что имеем дело с числом двенадцать. Поэтому помещаем после 1 запятую:

$$1{,}2.$$

Не нужно забывать, что это всего лишь сокращенная запись суммы

$$1+\frac{2}{10}.$$

Точно так же

$$32{,}456=32+\frac{4}{10}+\frac{5}{100}+\frac{6}{1000}.$$

Так мы приходим к десятичным дробям.

Все дроби, которые имеют в знаменателе 10, 100, 1000 или любое другое число — единицу десятичной

системы, можно также записать в десятичной форме. Так, например:

$$\frac{23}{100}=\frac{20}{100}+\frac{3}{100}.$$

$\frac{20}{100}$ можно сократить, поделив числитель и знаменатель на 10:

$$\frac{23}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100},$$

и, поскольку целых здесь нет, в результате получаем

$$\frac{23}{100}=0{,}23.$$

Можно ли, однако, записать в виде десятичной дроби всякую дробь?

Самым простым способом замены обычной дроби на дробь десятичную является выполнение деления, обозначаемого дробной чертой:

$$\frac{6}{5}=6:5=1$$

остаток 1.

Остаток 1 разложим на десятые доли — всего их в единице десять. Поделив на 5, получаем 2 десятые. Так можно записать результат, используя запятую:

$$\frac{6}{10}:5=1{,}2.$$

Или же:

$$\frac{6}{5}=1{,}2.$$

Точно так же:

$$\begin{array}{l}\frac{7}{25}=7:25=0{,}2,\\ \quad\;\; 70\\ \quad\;\; 20\end{array}$$

причем остается 20 десятых. Мы можем их измельчить и получить 200 сотых. Если теперь мы поделим 200 сотых на 25, то получим 8 сотых:

$$\begin{array}{l}7:25=0{,}28.\\ 70\\ 200\end{array}$$

И, таким образом,

$$\frac{7}{25} = 0{,}28.$$

Однако можно завязнуть даже в самом простом случае:

$$\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0{,}44\ldots$$

$$\begin{array}{l} \;\;40 \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;4 \end{array}$$

Это деление не кончится никогда; как бы долго мы его ни продолжали, всегда в остатке будет 4. Поэтому — увы! — дробь $\frac{4}{9}$ нельзя записать в виде десятичной дроби.

А ведь до чего удобно работать с десятичными дробями! Возьмем хотя бы умножение десятичных дробей на 10. Это же детская забава! Когда нужно, например, умножить,

$$45{,}365 \cdot 10,$$

то достаточно заметить, что десять раз по четыре десятка — это четыре сотни, десять раз по 5 единиц — это 5 десятков, десять раз по три десятых — это три целых и так далее. Тогда сразу видно, что задачу можно решить, перемещая попросту запятую на одно место (иначе говоря, на один порядок) вправо:

$$453{,}65.$$

Тем самым все цифры оказываются перемещенными на одну позицию влево, и благодаря этому десятки становятся сотнями. Если мы умножим результат еще раз на 10, то получаем уже число, в 100 раз большее первоначального, то есть 4536,5. И тем самым обнаруживаем, что умножение на 100 можно выполнять, перемещая запятую на две позиции вправо.

Точно так же можно обнаружить, что деление на 10 выполняется одним лишь перемещением запятой влево.

Не правда ли, одни только эти удобства стоят того, чтобы мы могли пожелать: как было бы хорошо, если бы все дроби удалось записать в виде десятичных дробей!

Присмотримся еще раз — где же мы увязли?

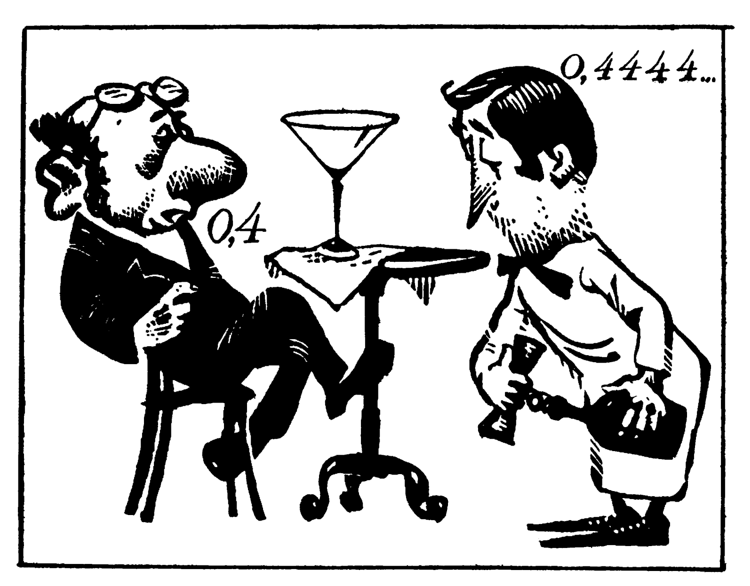
$$\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0{,}44\ldots$$

40

40

4

В этой задаче всегда остается остаток 4. Измельчая его, мы получаем 40 меньших единиц, а в числе 40 число 9 содержится снова 4 раза. Хотя у этого деления и нет конца, результат его вполне очевиден: в нем бесконечное количество раз повторяется число 4.



Практичный человек (допустим, продавец или портной) скажет на это: если бы даже это деление кончилось, например, на десятом выражении, то все равно мне не нужен был бы весь результат. Меня

интересуют в крайнем случае децилитры (децилитр — это десятая часть литра), или сантиметры (сантиметр — это сотая часть метра), или граммы (грамм — это тысячная часть килограмма). Было бы ненужной мелочностью обращать внимание на те ничтожно малые величины, которые появляются после тысячных долей. Из всей этой бесконечной десятичной дроби может оказаться нужным только

$$0{,}4,$$

или же

$$0{,}44,$$

или же

$$0{,}444.$$

Поэтому с дробью $\frac{4}{9}$ следует обращаться так же, как со всякой «порядочной» конечной десятичной дробью.

Физику для более точных измерений может потребоваться большее число знаков, однако и он имеет дело с так называемой границей погрешности. Физик в состоянии оценить, как велико может быть отклонение, вызванное несовершенством приборов и человеческих органов чувств при повторениях опыта. Тогда нет смысла принимать во внимание при расчетах еще меньшие единицы. Наверное, со временем приборы будут все более точными, возрастет точность измерений, однако же какие-то погрешности будут всегда. Начав выписывать число

$$0{,}4444\ldots,$$

мы должны будем где-то остановиться, пусть даже и очень далеко от запятой. Нет ничего плохого в том, что мы сегодня еще не знаем, насколько далеко придется нам уйти в будущее. Мы знаем заранее раз и навсегда, что можно пойти как угодно далеко, потому что вне всяких границ известно нам десятичное разложение дроби $\frac{4}{9}$. Мы знаем, что как угодно далеко в записи этого числа будут участвовать четверки и только четверки.

Может быть, хотя бы в этом смысле можно вы-

разить все дроби в десятичной форме? Или иначе формулируя вопрос: если деление не кончается никогда, то не располагаются ли по крайней мере получаемые при десятичном разложении цифры в соответствии с каким-либо правилом, которое дает нам возможность судить о целом?

Легко заметить, что на поставленный вопрос можно ответить утвердительно. Каждое разложение такого рода становится рано или поздно *периодическим*, то есть в определенном месте появляется группа цифр, которая затем уже повторяется постоянно.

Рассмотрим, например, дробь $\frac{21}{22}$. При каждом делении на 22 остаток, очевидно, меньше, чем 22. Если деление не закончено, то каждый остаток будет одним из чисел

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14,
15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Предположим, у нас есть шкаф с 21 выдвижным ящиком и эти числа — номера наших ящиков. Если при делении мы получаем, например, остаток 7, то в ящик 7 вкладываем шарик. Если мы запасемся терпением и проведем деление 22 раза, то в 21-м ящике будут лежать 22 шарика. Поэтому наверняка в каком-либо ящике должны оказаться два шарика. Таким образом, по крайней мере через 21 шаг остаток должен повториться. Если нам повезет, то одно из этих чисел повторится много раньше. Если, однако, остаток появляется второй раз, то все начинается сначала. Посмотрим, как все это выглядит на примере:

$$\frac{21}{22} = 21 : 22 = 0{,}954.$$

```
210
 120
  100
   12
```

Стоп! Остаток 12 у нас уже был. Значит, отсюда начинается повторение:

```
21 : 22=0,9545454.
 210
   120
     100
       120
         100
           120
             100
               12
```

За исключением недисциплинированной цифры 9, группа цифр — то есть 54 — повторяется бесконечное число раз.

Если, наоборот, у нас есть периодическая десятичная дробь, то мы можем определить, какая обычная дробь имеет такое разложение. Возьмем 0,9545454... и допустим, что мы не знаем еще дроби, которая преобразуется в десятичную дробь такого вида. Величину, которой мы не знаем, мы обозначим x. Таким образом,

$$x=0{,}9545454...$$

Если мы умножим это выражение на 1000, то есть перенесем запятую на три порядка вправо, то цифры вплоть до конца первого периода окажутся на месте целых:

$$1000x=954{,}5454...$$

Если же мы умножим x на 10, то перед запятой окажется лишь цифра, не относящаяся к периоду:

$$10x=9{,}545454...$$

Отнимем теперь последнюю величину от первой. С одной стороны, от $1000x$ отнимаем $10x$ и таким образом получаем 990 x. С другой стороны, в обоих числах части после запятых представляют собой бесконечные повторения группы 54. Поэтому эти части совершенно одинаковы и при вычитании исчезают. Разница между числами 954 и 9 равна 945, и поэтому в итоге мы получаем

$$990x=945.$$

Множимое 990 мы переносим в правую часть в качестве делителя:

$$x = \frac{945}{990}.$$

Эту дробь можно сократить на 45:

945 : 45 = 21, тогда как 990 : 45 = 22.
45 90

Таким образом,

$$x = \frac{21}{22},$$

в чем мы уже имели случай убедиться.

Во всем, что мы только проделали, был один весьма опрометчивый шаг: мы «забыли» про бесконечность. Разложение 0,9545454... мы рассматривали не с какой-то определенной точностью, а представили его себе выписанным вплоть до бесконечности и беспечно выполнили умножение, как если бы речь шла о какой-то конечной величине. По какому же праву мы могли с самого начала исходить из того, что 0,9545454... имеет какой-то конечный смысл?

Бесконечные ряды

Рассмотрим это подробней на простом примере. Не менее сомнительно, имеет ли

1,111...,

где 1 повторяется бесконечное число раз, конечный смысл. Любопытно, что такого рода бесконечные десятичные разложения никого не огорчают. Бесконечная же сумма

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots$$

производит куда более устрашающее впечатление, хотя речь идет всего лишь об иной форме записи нашей бесконечной десятичной дроби. И удивительно не то, что люди с неохотой относятся к перспективе заняться бесконечным суммированием, а ско-

рее то, что они соглашаются делать это в форме 1,111... Последовательность

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$$

можно считать определенной вплоть до бесконечности, потому что мы можем выписать члены этой последовательности, отстоящие как угодно далеко. Однако же принять как факт, что эта бесконечная дорога *пройдена до конца*, и говорить о сумме бесконечного числа выражений было бы слишком большой смелостью. Как это понимать?

Один знаменитый математик, будучи еще маленьким учеником, объяснил сам себе понятие бесконечной суммы на таком примере.

Чтобы привлечь внимание покупателей к определенному сорту шоколада, кондитер вкладывает в обертку каждой плитки шоколада талон. Предъявив 10 таких талонов, можно получить новую плитку шоколада. Сколько на самом деле стоит шоколад вместе с упаковкой?

Очевидно, речь не идет о стоимости одной только плитки шоколада, потому что под оберткой есть еще талон, за который мы получаем еще 1/10 плитки (за 10 талонов — одну плитку).

К этой десятой части плитки шоколада относится еще десятая часть талона, а поскольку за один талон мы получаем $\frac{1}{10}$ плитки шоколада, то за $\frac{1}{10}$ талона получаем одну десятую этого количества, то есть $\frac{1}{100}$ плитки шоколада.

К этой $\frac{1}{100}$ плитки относится еще $\frac{1}{100}$ талона, за которую мы снова получаем десятую часть предыдущего количества; десятой частью $\frac{1}{100}$ будет $\frac{1}{1000}$ плитки.

Так рассуждать мы можем без конца. Очевидно,

что эта цепь «добавок» не кончится никогда, и поэтому шоколад вместе с талоном стоит

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

плитки шоколада.

А теперь обнаружим другим способом, что стоимость шоколада вместе с талоном равна $1\cdot\frac{1}{9}$. Число 1 является, очевидно, стоимостью самого шоколада без упаковки; значит, нужно только доказать, что стоимость талона равна $\frac{1}{9}$ плитки шоколада. А для этого достаточно обнаружить, что 9 талонов имеют стоимость одной плитки шоколада; тогда наверняка 1 талон имеет стоимость в 9 раз меньшую.

Тот факт, что 9 талонов стоят ровно столько же, сколько одна плитка шоколада, можно тотчас же установить. Допустим, у меня 9 талонов. Я иду в кондитерскую и говорю: «Дайте мне, пожалуйста,



плитку шоколада. Я сразу же ее съем, а после заплачу». Я съедаю шоколад, и у меня остается приложенный к этой плитке талон. Теперь у меня 10 талонов, и я могу погасить при их помощи свою задолженность. Счет абсолютно равный: плитка шоколада съедена, зато у меня нет и талонов. Таким образом, 9 талонам соответствует одна плитка шоколада, или же один талон имеет стоимость $\frac{1}{9}$ плитки, и поэтому шоколад вместе с талоном обладает стоимостью, точно равной стоимости $1\frac{1}{9}$ плитки шоколада. И поэтому сумма бесконечного ряда

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

абсолютно точно равняется $1\frac{1}{9}$. Сумма эта не просто достижима, но — в нашем примере — даже съедобна.

Этот результат можно сформулировать следующим образом: если какая-то величина в первом грубом приближении равняется 1, в несколько лучшем приближении равняется $1+\frac{1}{10}$, в еще лучшем приближении, но все еще неточно[1], равняется $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$ и так далее до бесконечности, то *абсолютно точным* ее значением является число $1\frac{1}{9}$.

Я могу уже сейчас выполнить данное мною в одном из предыдущих разделов обещание. В смысле только что приведенной формулировки оказывается также справедливым вывод, что площадь круга можно приближенно выразить площадями многоугольников. Точно так же правило размещения простых чисел имеет смысл именно в этом строгом значении. Очевидно, читателю стоит поверить мне на слово, и тогда не

[1] В следующей главе мы остановимся на том, что вообще нужно понимать под «приближенной величиной».

будет необходимости приводить длинных доказательств.

В алгебре можно определить какое-то число, например, так: x означает число, которое, будучи поделенным на 2, помноженным на 3 и сложенным с 5, дает в результате 11, то есть x является числом, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{x}{2}\cdot 3+5=11.$$

Теперь мы познакомились с другим способом определения числа. Раздел математики, где числа с любой степенью точности определяются при помощи приближенных значений, называется а н а л и з о м.

А теперь подойдем к задаче с другой стороны и рассмотрим число $1\frac{1}{9}$. Целую единицу можно «разменять» и получить девять девятых долей. Таким образом,

$$1\frac{1}{9}=\frac{9}{9}+\frac{1}{9}=\frac{10}{9}=10:9=1{,}1111\ldots,$$
$$\begin{array}{l} 10 \\ \;\;10 \\ \;\;\;\;10 \end{array}$$

причем равенство числа $1\frac{1}{9}$ и этого бесконечного разложения мы доказали только что.

Математик об этом скажет так: последовательность частичных сумм

$$1;\; 1{,}1=1+\frac{1}{10};\;\; 1{,}11=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100};\;\ldots$$

стремится к пределу (часто обозначаемому латинским словом limes) $1\frac{1}{9}$. Можно также сказать: ряд

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$$

с х о д и т с я, и его суммой является число $1\frac{1}{9}$.

Так мы ввели новое понятие суммы, и потому нужно проверить, сохраняют ли силу старые правила счета. Не будем вдаваться в утомительные расчеты и

рассмотрим только их результат. **Ответ — отрицательный.**

И здесь бесконечность словно ускользает из клетки наших правил. Именно поэтому поставленный нами вопрос и дал толчок специальным исследованиям, направленным на определение рядов, в которых можно произвольно переставлять и группировать выражения. Рассмотренный нами только что ряд $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$ с этой точки зрения ведет себя прилично.

Рассмотрим, однако, такой ряд:

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

Если бы мы выполняли здесь действия в несколько иной последовательности, объединяя выражения в группе по два

$$\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\underbrace{1-1}_{0}+\ldots,$$

то получили бы ряд из одних нулей. И как часто бы мы ни складывали 0, сумма этого ряда, очевидно, всегда останется равной 0. Значит, сумма ряда равна 0. Но если соединить выражения следующим образом:

$$1-\underbrace{1+1}_{0}-\underbrace{1+1}_{0}-\ldots,$$

то получим ряд

$$1+0+0+\ldots,$$

и сумма такого ряда равна 1. Как видно, было бы ошибкой утверждать, что действия можно всегда проводить в произвольной последовательности.

Одно остается верным и в дальнейшем: бесконечный ряд также можно, выражение за выражением, умножать на данное число.

Посмотрим, нельзя ли отыскать еще что-либо интересное, пользуясь нашим результатом. Если от числа

$$1{,}1111\ldots=1\frac{1}{9}$$

мы отнимем 1, то получим

$$0{,}1111\ldots=\frac{1}{9}.$$

Умножив теперь полученную величину на 9, будем иметь

$$0{,}9999\ldots=\frac{9}{9}=1.$$

Разделив этот результат на 10, получим 0,09999...=0,1. Деля еще раз на 10, получаем

$$0{,}009999\ldots=0{,}01$$

и так далее.

Таким образом, конечные десятичные дроби 1; 0,1; 0,01, ... можно записать в бесконечной форме, складывающейся из нескольких нулей и затем — одних только девяток. Отсюда одновременно следует, что все конечные десятичные дроби можно записать двумя способами в бесконечной форме. Например, конечную дробь 0,2 можно записать сначала как

$$0{,}200000\ldots$$

(добавление нулей не меняет числа). В то же время 0,2 можно записать в виде

$$0{,}199999\ldots,$$

потому что 0,1, которую мы отнимаем от 0,2, равняется числу 0,099999..., добавляемому взамен. (Можно показать, что это единственная двусмысленность, которая появляется в десятичных разложениях чисел.)

В нашем ряде

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots$$

каждое выражение является десятой частью предыдущего. Можно также сказать, что каждое выражение равно предыдущему выражению, помноженному на $\frac{1}{10}$.

Вспомните арифметическую прогрессию; там разница между двумя соседними выражениями оставалась постоянной. Ряд, в котором частное двух соседних выражений всегда остается одним и тем же, называется *геометрической прогрессией*.

Не следует впадать в излишнюю самонадеянность и считать, что мы в состоянии суммировать все бесконечные ряды. Рассмотрим, например, геометрическую прогрессию.

$$1+10+100+1000+\ldots,$$

в которой отношение соседних выражений всегда равно 10. Ясно, что частичные суммы этого ряда рано или поздно становятся больше какого бы то ни было числа (например, все суммы, начиная с четвертой, становятся больше 1000), и поэтому ряд бесконечно растет. То же самое имеет место для геометрической прогрессии с отношением, равным 1, то есть прогрессии, в которой каждое выражение в 1 раз больше предыдущего:

$$1+1+1+1+1+1+\ldots$$

Здесь каждая сумма, начиная с тысячной, будет больше 1000, а каждая сумма, начиная с миллионной, будет больше 1 000 000 и так далее.

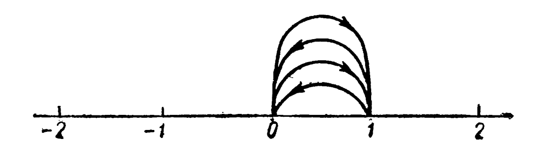
Если, наконец, каждое выражение будет равно предыдущему, помноженному на —1, то, поскольку $1\cdot(-1)$ равняется —1; $(-1)\cdot(-1)$ равняется +1; $(+1)\cdot(-1)$ снова равняется —1 и так далее, мы получаем ряд

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots,$$

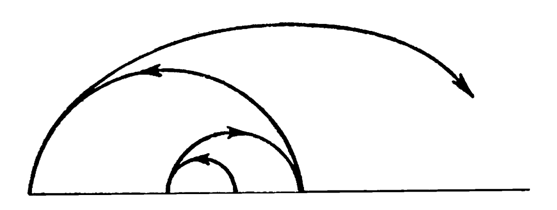
который уже успел продемонстрировать нам свое коварство. Его частичные суммы последовательно равны:

$$1;$$
$$1-1=0;$$
$$\underline{1-1}+1=0+1=1;$$
$$\underline{\overline{1-1}}+\underline{1-1}=0+0=0$$

и так далее. Отсюда видно, что частичные суммы попеременно равны то 0, то 1.



Они постоянно перескакивают от числа 1 к числу 0 и обратно (воспользовавшись специальным термином, можно сказать, что они осциллируют) и поэтому не могут приблизиться ни к какому числу. Эти скачки будут еще большими и даже будут постоянно возрастающими, если отношение соседних членов ряда будет числом отрицательным, с абсолютной величиной, большей единицы. Картина тогда будет такая:



Таким образом, из всех до сей поры рассмотренных рядов мы можем просуммировать только ряд

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots .$$

Это, очевидно, связано с тем фактом, что выражения такого ряда становятся все меньше и меньше и даже становятся как угодно малы — для этого нужно только «продвинуться» достаточно далеко. Стремятся они (вспомним нашу «шоколадную формулировку») к 0. (То есть можно показать, что если какая-то величина в первом приближении равна 1, в лучшем приближении равна $\frac{1}{10}$, в еще лучшем приближении равна $\frac{1}{100}$ и так далее, то величина эта с полной точностью может быть только нулем. Впредь я не буду прибегать к столь длительным объяснениям, а буду ссылаться лишь на точность примера с шоколадом.) Итак, можно сделать вывод, что если нужно просуммировать бесконечное множество чисел и если «далекие» выражения становятся все меньше и меньше, все более незначительными, то эти выражения все меньше влия-

ют на результат, и поэтому чем более «далекую» частичную сумму мы рассматриваем, тем точнее получаем представление об общей сумме ряда.

Однако такого поведения выражений еще недостаточно для того, чтобы можно было суммировать ряд. Последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

также стремится к 0, хотя и медленнее предыдущей (в предыдущей последовательности все выражения, следующие за четвертым, были меньше $\frac{1}{1000}$, а теперь, меньше $\frac{1}{1000}$ будут выражения, следующие за тысячным выражением). Частичные же суммы ряда

$$1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+$$
$$+\underline{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}+\ldots$$

стремятся к бесконечности.

В этом можно убедиться следующим образом. Мы уже знаем, что величина дроби уменьшается, если мы увеличиваем знаменатель (разделяя торт на большее количество кусков, мы получаем меньшие порции). Поэтому частичные суммы уменьшаются, если вместо $\frac{1}{3}$ мы возьмем меньшую дробь $\frac{1}{4}$, затем каждую из дробей $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{7}$ заменим $\frac{1}{8}$, вместо выражения $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{15}$ поставим в ряд $\frac{1}{16}$ и так далее. Вообще нужно всегда дойти до такого выражения, у которого в знаменателе стоит какая-либо степень числа 2 ($4=2^2$, $8=2^3$, $16=2^4$), и заменить все выра-

жения, стоящие слева, этим последним выражением. Частичные суммы ряда

$$1+\frac{1}{2}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+$$
$$\underline{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\ldots,$$

очевидно, меньше частичных сумм нашего первоначального ряда.

Суммы выражений в отдельных группах таковы:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ после сокращения $=\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$ „ „ „ „ „ $=\frac{1}{2}$;

$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}$ „ „ $=\frac{1}{2}$.

Очевидно, каждая группа дает $\frac{1}{2}$. Однако 2000 раз $\frac{1}{2}$ равняются 1000, а 2 000 000 раз $\frac{1}{2}$ дают один миллион. Так что достаточно удаленные частичные суммы этого ряда будут становиться больше какого угодно числа. Тем более это должно иметь место для еще больших частичных сумм нашего первоначального ряда.

Для сходимости ряда, таким образом, недостаточно, чтобы его выражения кое-как ползли к нулю; они должны еще стремиться к нулю достаточно быстро.

12. Числовая прямая заполняется

Десятичные разложения дробей оказались на удивление закономерными. Они дают только конечные десятичные дроби и дроби с постоянно повторяющимся периодом. Одновременно мы привыкли к мысли, что бесконечное десятичное разложение можно также рассматривать как некоторое определенное число. Изучая

разложение 1,1111..., мы пришли к выводу, что оно имеет значение $1\frac{1}{9}$. И было бы странным, если бы нам не пришла на ум мысль: ведь можно представить себе бесконечное десятичное разложение, которое не является периодическим. Соответствуют ли таким разложениям какие-либо числа?

Иррациональное число

Легко представить себе непериодическое десятичное разложение, которое, однако, подчиняется строгому и легко устанавливаемому правилу. Пользуясь им, цифры такого разложения может выписывать сколь угодно долго всякий, кто только пожелает. Такую десятичную дробь можно чуть ли не всю охватить взглядом, но тем не менее периода у нее нет. Вот пример такой дроби:

$$0{,}1010010001000010000010000001\ldots$$

Правило, по которому строится это десятичное разложение, чрезвычайно просто: за цифрой 1 всегда следует цифра 0, но количество нулей с каждым разом увеличивается на единицу. Здесь нельзя говорить о какой-либо периодичности, потому что в таком случае цифра 1 должна была бы рано или поздно начать появляться с одинаковыми промежутками. А поэтому выписанное нами выражение не может быть разложением какой-либо дроби; частичные суммы не могут стремиться к какому-либо рациональному числу.

Однако мы сейчас увидим, что они все же к чему-то сходятся и что сходятся они к отрезку множества рациональных чисел. А отсюда можно будет тотчас сделать вывод, что между рациональными числами, несмотря на неограниченную плотность этих чисел, существуют бреши, пустые места.

Если мы в нашем десятичном разложении остановимся на десятых долях, то придется опустить все остальные цифры. Поэтому все последующие частичные суммы будут превышать

$$0{,}1.$$

С другой стороны, однако, все частичные суммы будут меньше

0,2,

ибо лишь тогда, когда все цифры, следующие за одной десятой, суть девятки, то есть в случае

0,19999999...

мы бы получили величину 0,2 — об этом мы уже подробно говорили в предыдущем разделе.

Таким образом, все последующие частичные суммы находятся между 0,1 и 0,2, то есть все они лежат в этом нарисованном жирной линией интервале числовой прямой.

0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

Каждую точку этого интервала можно рассматривать как первое приближение. В то же время очевидно, что если мы остановимся на тысячных долях, то все последующие частичные суммы будут заключены между

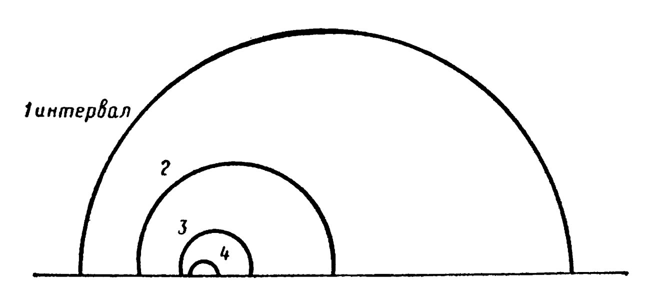
0,101 и 0,102.

На рисунке это можно показать лишь неточно, потому что наши точки слишком близко лежат друг к другу, — ведь разница между ними составляет всего лишь одну тысячную. Точки этого интервала, который полностью лежит в предыдущем интервале, дают нам уже более хорошее приближение.

Продолжая эти рассуждения, мы приходим к выводу, что все частичные суммы достаточно длинного ряда должны находиться во все более узких, размещенных друг в друге интервалах:

между 0,101001 и 0,101002,
» 0,1010010001 и 0,1010010002,
» . . . .

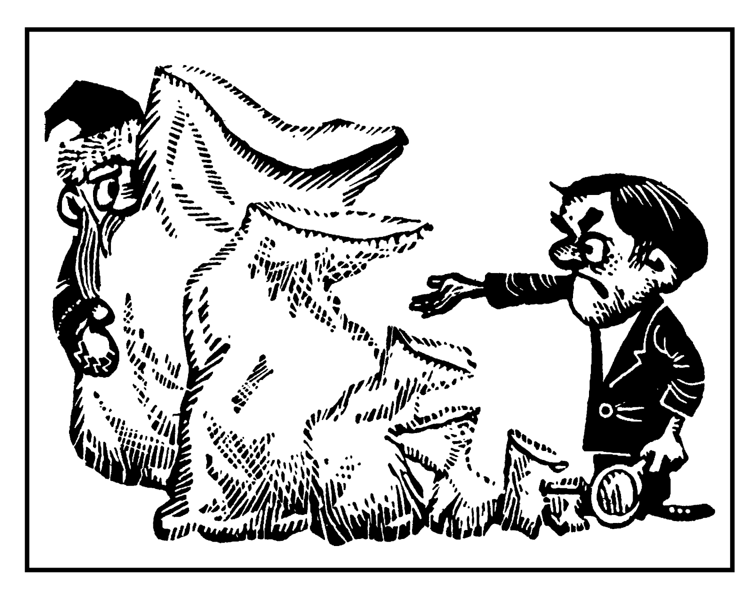
Если бы эти интервалы не стягивались так быстро, то картина была бы примерно такая:



Длины этих интервалов последовательно равны:

0,1;
0,001;
0,000001;
0,0000000001,

то есть одной десятой, одной тысячной, одной миллионной и так далее. Очевидно, они стремятся к 0, и



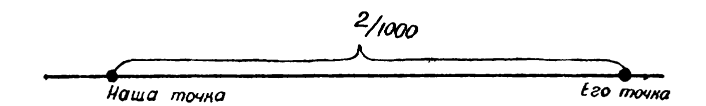
притом сломя голову, так что их нельзя ни обозначить на рисунке, ни даже назвать. Таким образом, наши частичные суммы с достаточно большими номерами устраивают столпотворение в этих неограниченно уменьшающихся интервалах.

То, что каждый последующий интервал содержится в предыдущем, напоминает деревянные игрушки-матрешки или же шутливые подарки, которые наверняка каждый получал: вам дают в руки пакет, вы снимаете обертку, а под ней оказывается новая упаковка. Вы с интересом снимаете обертку за оберткой, но в руках у вас по-прежнему остается пакет — правда, с каждым разом уменьшающийся. Но вот вы дошли до конца. Под всеми обертками оказывается какая-нибудь безделушка, а то и просто комок смятой бумаги. Во всяком случае, такой пакет не может доставить бесконечного огорчения.

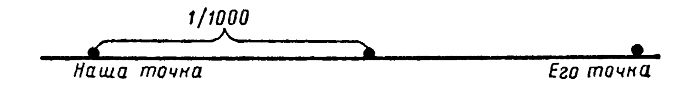
В нашем же примере такая ситуация повторяется бесконечное число раз. Второй предел полностью лежит в первом, третий заключен и в первом и во втором, четвертый содержится в трех первых и так далее. Наши примеры подсказывают нам, что если мы будем без конца строить интервалы, каждый из которых содержится во всех предыдущих, то нечто такое, к чему они все стремятся, должно быть какой-то общей их частью.

Можно, однако, показать, что *во всех* пределах вместе может лежать не более чем одна *общая точка*.

Допустим, что мы нашли такую общую точку, а кто-то приводит нам контрпример и утверждает, что им найдена другая общая для всех интервалов точка, отличная от нашей, пусть она лежит справа от нашей точки. Очевидно, этот некто не утверждает, что его точка расположена очень далеко от нашей точки: но мы — исключительно в целях большей наглядности — нарисуем обе точки в достаточном удалении друг от друга. Наше рассуждение будет с тем же успехом применимо и для произвольно малых отрезков.



Как бы близки ни были эти точки, расстояние между ними все же равно какому-то определенному числу, например двум тысячным единицы; не надо забывать, что мы имеем дело с разными точками! Однако же длины интервалов стремятся к нулю, поэтому рано или поздно они окажутся меньше одной тысячной единицы. Наша точка находится во всех интервалах сразу; если бы даже она помещалась в левом конце интервала, длина которого короче одной тысячной, то правый конец этого интервала все равно не мог бы «дотянуться» до точки, удаленной от нашей точки на две тысячных.



Следовательно, точка, приведенная в качестве контрпримера, должна быть вне этого интервала и вне всех интервалов, имеющих меньшую длину. Поэтому она не может быть точкой, общей для всех интервалов.

Итак, все интервалы имеют только одну-единственную общую точку; поскольку все достаточно «удаленные» частичные суммы разложения 0,1010010001000010000001... находятся в каждом из интервалов, постольку образы этих сумм на числовой прямой все более стремятся к этой точке.

Итак, мы обнаруживаем на числовой прямой точку, которой не соответствует ни одно из известных нам до сей поры чисел. Хотя числовая прямая густо покрыта дробями, в этом месте не может оказаться никакая дробь. Ведь десятичное разложение каждой дроби является периодическим, тогда как наше десятичное разложение 0,1010010001..., стремящееся к этой точке, не является периодическим. Но в то же время

это вполне определенная точка, лежит она на точно определенном расстоянии от нулевой точки. Если, однако, мы попробуем измерить это расстояние, то не сможем этого сделать ни с помощью единиц измерения, ни с помощью долей этих единиц. Таким образом, этот отрезок не имеет — по крайней мере на уровне наших с вами знаний — никакой меры. Чтобы устранить этот недостаток, скажем, что мера нашего отрезка равна иррациональному числу

$$0{,}101001000100001000001\ldots$$

Итак, это доселе нам неизвестное, но полностью определенное «нечто», которое можно все более точно приближать рациональными величинами:

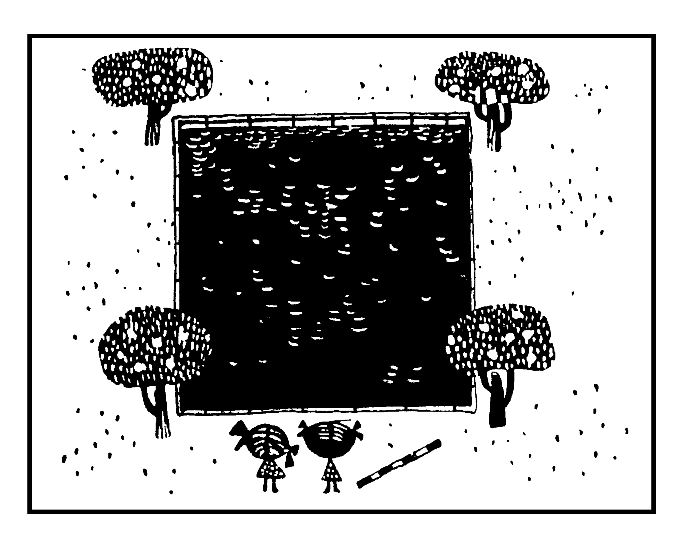
$$0{,}1;\quad 0{,}101;\quad 0{,}101001;\quad \ldots,$$

мы рассматриваем как некоторое новое число. Это новое число столь же полезно и для просто практического человека и для физика, как и разложение $\frac{4}{9}=0{,}444\ldots$ Приближая это число рациональными величинами, мы можем достичь какой угодно точности.

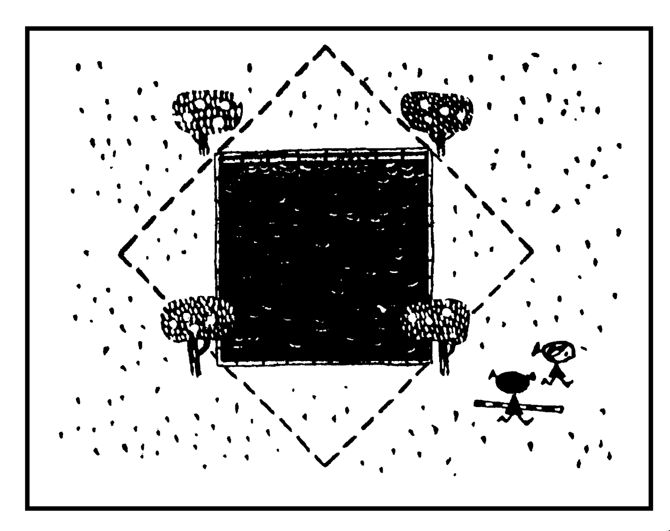
В самом деле, мы знаем все десятичные знаки разложения этого числа и по мере надобности можем принимать их во внимание; мы имеем представление об общем виде этого разложения.

Точно так же можно показать, что всякому другому непериодическому десятичному разложению, определенному с помощью некоторого правила записи цифр, соответствует какая-то другая определенная точка и какое-то другое определенное расстояние от нулевой точки на числовой прямой. На такие бесконечные разложения мы смотрим как на меры соответствующих расстояний и называем их иррациональными числами.

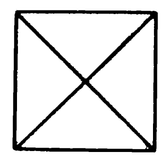
Быть может, эти рассуждения покажутся читателю слишком абстрактными, отвлеченными. Однако моя ученица, четырнадцатилетняя Ева, сама как-то пришла к выводу, что существует отрезок, меру которого нельзя выразить при помощи целых или дробных чисел. Она стала как-то шутки ради решать такую задачу. Квадратный пруд украшен четырьмя деревьями, посаженными по углам этого пруда:



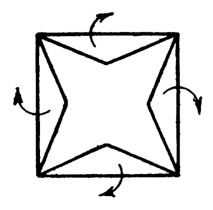
Нужно увеличить пруд так, чтобы его поверхность стала в два раза больше; причем мы хотим, чтобы пруд сохранил форму квадрата, а деревья остались на своих местах. Ева пришла к выводу, что решение должно быть таким:



Площадь большого квадрата в самом деле в два раза больше площади меньшего квадрата. Чтобы это увидеть, нарисуем в первоначальном нашем квадрате диагонали:



Теперь легко видеть, что больший квадрат получится, если мы «вывернем» наружу четыре треугольника, получившихся после того, как были нарисованы диагонали:



А тем самым мы к площади меньшего квадрата добавляем столько же, сколько содержала его первоначальная площадь.

Однако Ева на этом не остановилась. Она хотела также узнать, какова будет длина одного берега нового пруда, если длина берега первоначального пруда равнялась 1 километру. Площадь поверхности старого пруда равнялась $1 \cdot 1 = 1$ квадратному километру; поверхность увеличенного пруда в два раза больше, то есть она равняется двум квадратным километрам. Естественно, возникает вопрос, какое число нужно возвести в квадрат, чтобы получить в результате 2.

Тем самым мы приходим к действию, обратному возведению в степень, приходим к извлечению корней. Задача состоит в отыскании $\sqrt{2}$, ибо число — если только оно существует, разумеется, — которое, будучи возведенным в квадрат, дает 2, мы обозначаем $\sqrt{2}$.

Ева принялась считать. Сторона меньшего квадрата имеет длину, равную 1 километру; сторона большего квадрата имеет, очевидно, бóльшую длину; больший пруд не может иметь длину, равную 2 километрам, иначе площадь его поверхности равнялась бы $2 \cdot 2 = 4$ квадратным километрам. Значит, искомая длина находится между 1 и 2.

Тогда Ева принялась исследовать числа, превышающие 1 на несколько десятых долей. При этом она обнаружила, что

$$1{,}4^2 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \text{ и } 1{,}5^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25.$$

Число 1,96 меньше, а число 2,25 больше равной двум единицам площади поверхности пруда. Следовательно, искомая длина находится между

$$1{,}4 \text{ и } 1{,}5.$$

Теперь Еве не оставалось ничего иного, как поделить расстояние между этими числами на сотые доли и начать новые испытания. Ева пришла к выводу, что искомая длина находится между 1,41 и 1,42.

Продвигаясь таким образом все дальше и дальше, Ева все более приходила к выводу, что ей вовсе не найти числа, которое, будучи возведенным в квадрат, дает 2. «Но ведь такое число должно существовать — сторона большего квадрата вещь вполне реальная, я могу эту сторону построить!» — думала Ева.

Предположение Евы было правильным. Не существует рационального числа, квадрат которого равнялся бы 2. То, что нет целого числа, обладающего этим свойством, Ева уже доказала, обнаружив, что искомое число расположено между 1 и 2; между 1 и 2 нет никаких целых чисел. Остается только исследовать дроби между 1 и 2.

Такую дробь следует вначале сократить до тех пор, пока не получится дробь несократимая. После того как сокращение проведено, знаменатель не может равняться 1, потому что, например, $\frac{3}{1}$ означает 3 целых, а между 1 и 2 нет целых чисел. Квадрат несократимой дроби также нельзя сократить, потому что, например,

$$\left(\frac{15}{14}\right)^2=\frac{15\cdot 15}{14\cdot 14},$$

а дробь $\frac{15}{41}$ нельзя сократить, потому что

$$15=3\cdot 5 \qquad \text{и} \qquad 14=2\cdot 7,$$

или, другими словами, числа 15 и 14 не имеют общих простых множителей. Умножая каждое из этих чисел само на себя, мы также не можем получить общих простых множителей:

$$\left(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 7}\right)^2=\frac{3\cdot 5\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 7\cdot 2\cdot 7},$$

и, таким образом, никакой речи о сокращении быть не может. Однако же дробь, которую нельзя сократить и которая не имеет в знаменателе 1, никак не может равняться 2.

Попытки, предпринятые Евой, были не чем иным, как началом заключения во все уменьшающиеся интервалы, и одновременно началом разложения числа $\sqrt{2}$ в десятичную дробь. Всякое число в десятичной системе, если оно лежит в интервале между 1 и 2, начинается всегда с

$$1, \ldots .$$

Каждое число, начинающееся таким образом, можно рассматривать как первое приближение числа $\sqrt{2}$. Так как мы уже знаем, что число это лежит между 1,4 и 1,5, то мы можем написать еще одну цифру десятичного разложения

$$1{,}4\ldots;$$

все числа, начинающиеся таким образом, дают уже более хорошее приближение. Из того, что искомое число лежит между 1,41 и 1,42, следует, что мы можем написать следующую цифру разложения

$$1{,}41\ldots .$$

Теперь следовало бы поделить расстояние между 1,41 и 1,42 на тысячные доли и выяснить, какое из чисел

$$1{,}410;\ 1{,}411;\ 1{,}412;\ 1{,}413;\ 1{,}414;\ 1{,}415;$$
$$1{,}416;\ 1{,}417;\ 1{,}418;\ 1{,}419$$

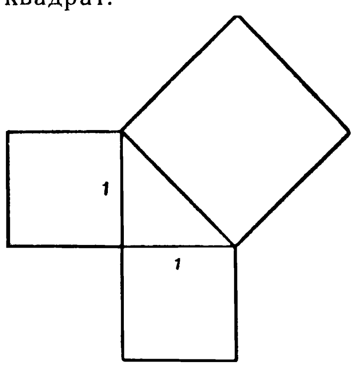
обладает тем свойством, что квадрат этого числа меньше двух, а квадрат следующего числа уже больше двух. Эти два числа и образуют «коробочку», содержащую число $\sqrt{2}$, причем длина ее равна одной тысячной. Таким образом, тысячные доли также будут точно определены в десятичном разложении.

Существует также механический способ отыскания цифр десятичного разложения числа $\sqrt{2}$. Однако суть дела здесь заключается именно в этом постепенном сужении границ, в которых должно находиться искомое число.

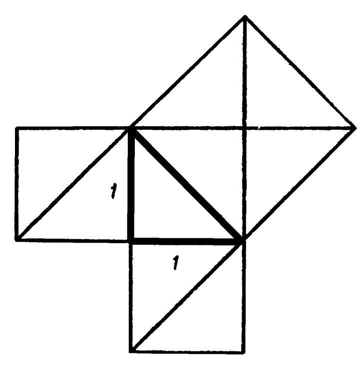
Этот способ можно использовать бесконечно и получать все более улучшающиеся приближения. Мы знаем, что никогда это не кончится и никогда мы не получим определенной дроби, потому что число $\sqrt{2}$ не может быть рациональным. И в то же время мы точно и осязаемо представляем себе величину этого числа, определяемого с помощью все более улучшающихся приближений: это сторона квадрата, ограничивающего поверхность увеличенного пруда.

Теорема Пифагора

С числом $\sqrt{2}$ можно также познакомиться при помощи знаменитой теоремы Пифагора. Нарисуем прямоугольный треугольник, у которого оба катета равны единице, и построим на каждой из трех сторон этого треугольника квадрат.



Если в каждом из малых квадратов мы нарисуем по одной диагонали, а в большем квадрате проведем обе диагонали, то получим одинаковые прилегающие друг к другу треугольники.



Два малых квадрата содержат вместе 4 треугольника, а большой квадрат — также 4 треугольника. Поэтому общая поверхность обоих малых квадратов равна поверхности одного большого квадрата. Поскольку площадь квадрата мы получаем, возводя во вторую степень длину его стороны, постольку мы можем сказать, что сумма двух квадратов, построенных на катетах, или сумма квадратов катетов, равна квадрату гипотенузы. (Это верно не только для построенного нами треугольника, но и вообще для всех прямоугольных треугольников. Доказательство общего случая несколько более сложно.) Сумма квадратов катетов нашего треугольника равна

$$1^2+1^2=1+1=2,$$

и это должно быть равно квадрату гипотенузы, то есть длина гипотенузы равняется $\sqrt{2}$.

Можно показать, что действия с иррациональными числами удается выполнить, заменив иррациональные числа их приближенными значениями. Приближенные значения суть числа рациональные, и для них старые правила счета сохраняют справедливость. А в таком случае бесконечность не опровергает правил, установленных для конечного случая.

Теперь мы можем вернуться к не разрешенной до сих пор проблеме — всегда ли можно выразить в сантиметрах и долях сантиметра длины ребер куба или сторон прямоугольника. Ответ таков: не всегда, потому что существуют отрезки, которые нельзя точно измерить даже никакими долями сантиметра. Если, например, $\frac{1}{20}$ сантиметра укладывается в каком-то отрезке ровно 31 раз, то длина этого отрезка равняется $\frac{31}{20}$ сантиметра. А мы только что убедились в том, что в прямоугольном треугольнике с катетами длиной в 1 сантиметр каждый длина гипотенузы не может быть выражена в сантиметрах при помощи какого-либо рационального числа. (Нужно подчеркнуть, что речь идет о выражении длины именно в выбранных нами единицах; числу $\sqrt{2}$ также соответствует определенная длина; можно было бы ее взять в качестве линейной единицы, и тогда отрезок наш был бы уже измеримым.)

Пользуясь приближенными рациональными значениями, мы могли бы показать с той завидной точностью, какой мы достигли в нашем примере с шоколадом, что прежние наши результаты, касающиеся исчисления площадей и объемов, остаются истинными также и в таких случаях.

После разговора об уравнениях второй степени за мной остался еще один долг. В свое время нам пришлось оставить нерешенным уравнение

$$(x+3)^2=2.$$

Теперь мы можем это уравнение решить. Поскольку в нашем распоряжении уже есть отрицательные числа и мы знаем, что как положительные, так и отрицательные числа имеют положительный квадрат, постольку мы можем как $+\sqrt{2}$, так и $-\sqrt{2}$ рассматривать в качестве того числа, которое, будучи возведено в квадрат, дает число 2. Таким образом, мы имеем:

$$x+3=+\sqrt{2} \text{ или } x+3=-\sqrt{2}$$

и, перенося слагаемое 3 вправо как вычитаемое, получаем два решения:

$$x=-3+\sqrt{2} \text{ или же } x=-3-\sqrt{2}.$$

Отрицательные числа приводят к новым сложностям. Если нужно решить уравнение

$$x^2=-9,$$

то неизвестно, с какой стороны к этому уравнению подступиться, потому что как квадрат числа +3, так и квадрат числа —3 равен +9. Мы не знаем никакого числа, которое, будучи возведенным в квадрат, давало бы —9. К этому вопросу мы еще вернемся.

Мощность множества действительных чисел

Иррациональные числа были введены оттого, что на числовой прямой мы открыли бреши, пустые места, точки, которым ранее не соответствовали никакие числа. Рациональные и иррациональные числа получили вместе название д е й с т в и т е л ь н ы х чисел (а нам еще придется иметь дело с числами, более удаленными от действительности); они заполняют уже всю числовую прямую. В самом деле, возьмем какую-нибудь точку числовой прямой; она находится между двумя вполне определенными целыми числами, затем между двумя вполне определенными десятыми долями, потом между двумя вполне определенными сотыми долями и так далее — так же точно, как и $\sqrt{2}$ в изысканиях моей ученицы Евы. Так мы последовательно определяем знаки десятичного разложения. Если это разложение где-то кончается (точка совпадает с каким-то количеством целых, десятых, сотых, тысячных и так далее) или же оказывается периодическим, то нашей точке будет соответствовать рациональное число. Если ни один из этих случаев не имеет места, то наша точка обозначает иррациональное число.

Если, например, мы попробуем заключить в такого рода пределы точку, соответствующую числу $1\frac{1}{9}$ —

числу, известному нам по «шоколадному примеру», — то убеждаемся последовательно, что число это лежит между 1 и 2; между 1,1 и 1,2; между 1,11 и 1,12; между 1,111 и 1,112 и так далее; таким образом, приближения

$$1;\ 1{,}1;\ 1{,}11;\ 1{,}111;\ldots$$

содержатся последовательно в этих все более сужающихся отрезках (попадают точно в левые концы этих отрезков). Именно поэтому эти числа дают все более улучшающиеся приближения числа $1\frac{1}{9}$, поэтому они подходят к этому числу все более близко. Они, очевидно, образуют периодическое разложение, потому что $1\frac{1}{9}$ — рациональное число.

Много ли иррациональных чисел существует на числовой прямой?

Хотя мы и столкнулись с ними как с каким-то исключением, их, очевидно, должно быть весьма много. Создается впечатление, что периодическое десятичное разложение встречается лишь случайно. Но один раз уже оказалось, что такого рода впечатления могут быть весьма обманчивы, — вспомним, как мы думали, что рациональных чисел больше, чем натуральных. На деле же оказалось, что все рациональные числа можно выстроить в одной последовательности, благодаря чему все без исключения рациональные числа могут найти себе среди натуральных пару: для первого выражения последовательности это будет число 1, для второго — число 2 и так далее. Что же нам скажут иррациональные числа, если мы дадим команду строиться парами?

Рассмотрим сначала множество рациональных и иррациональных чисел, то есть множество действительных чисел. Числа мы будем рассматривать в их десятичной форме. Ограничимся при этом числами, расположенными между 0 и 1, то есть числами, которые начинаются с 0 целых; благодаря этому мы можем не обращать внимания на целую часть. Давайте убедимся в том, что даже эта часть множества действительных чисел имеет мощность больше мощности

множества натуральных чисел. Нельзя образовать последовательность всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, не пропустив при этом ни одного числа.

Допустим, кто-то утверждает, что мы не правы и у него заготовлен контрпример, опровергающий нашу точку зрения. Значит, наш оппонент образовал последовательность действительных чисел, начинающихся с 0 целых, и при этом утверждает, что не упустил в этой последовательности ни одного числа. Более того, наш оппонент даже выписал эту последовательность. Очевидно, он выписал только такое количество чисел, которое позволяет уловить закономерность в их размещении и тем самым позволяет всякому, кто только пожелает, продолжать эту последовательность как угодно далеко. Ведь отдельное иррациональное число мы можем определить только таким образом, потому что иррациональные числа являются бесконечными десятичными дробями. Последовательность может начинаться хотя бы так:

первое	число	0,1,
второе	»	0,202020...,
третье	»	0,3113111311113...,

. . . .

и нас хотят убедить в том, что числа эти можно продолжать выписывать дальше в соответствии с каким-то правилом так, что рано или поздно каждое действительное число окажется «охваченным» этой последовательностью.

Каково бы ни было это правило выписывания чисел, можно тем не менее указать действительное число, начинающееся с 0 целых и не содержащееся в этой последовательности.

Давайте прежде всего заменим все конечные дроби, содержащиеся в этой последовательности, бесконечными. Для этого нужно всего-навсего дописать безобидные нули. Тогда

первое	число	равняется	0,1000000000000...,
второе	»	»	0,2020202020202...,
третье	»	»	0,3113111311113...,

. . . .

А теперь попробуем осуществить наш план. Первой цифрой нашего числа будет, очевидно,

$$0,\ldots.$$

Что нам поставить на месте, занимаемом десятыми долями? Посмотрим, какая цифра находится на этом месте в первом числе контрпримера, и берем другую цифру — только не 0 и не 9. Говоря конкретнее: поскольку в первом числе нашего контрпримера стоит одна десятая, ставим в том числе, которое мы строим, две десятых. (Точно так же мы могли бы поставить на этом месте и на любом из последующих мест какую угодно из цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8.) Если бы на месте десятых в первом числе контрпримера стояла цифра, отличная от 1, то мы поставили бы на этом месте в числе, которое мы строим, цифру 1. Итак, теперь наше число имеет вид

$$0,2\ldots.$$

Чтобы выбрать цифру на место сотых, посмотрим, какая цифра стоит на этом месте во втором числе контрпримера. Выбираем произвольную другую цифру — с тем только, чтобы это не были 0 и 9. Для простоты будем пользоваться только цифрами 1 и 2. Во втором числе контрпримера мы видим 0 сотых (а не 1); поэтому на место, где стоят сотые, ставим цифру 1 (если бы в контрпримере на этом месте стояла цифра 1, то мы поставили бы цифру 2). Таким образом, наше с вами число принимает уже такой вид:

$$0,21\ldots.$$

Так же точно поступаем и дальше. На место тысячных ставим цифру 2, потому что в третьем числе контрпримера имеется одна тысячная. Таким образом, наше число с точностью до третьего десятичного знака имеет вид

$$0,212\ldots,$$

и теперь каждый уже может выписывать и дальше цифры этого числа. Если числа контрпримера следуют друг за другом в соответствии с какой-то разумной

закономерностью, то мы так же точно можем без затруднений выписывать наше число.

Таким образом, мы получаем бесконечную десятичную дробь, начинающуюся с 0 целых, и этой дроби наверняка нет в последовательности, приведенной в качестве контрпримера. Дробь эта отличается от первого числа контрпримера по крайней мере десятыми, от второго — по крайней мере сотыми, от третьего — по крайней мере тысячными, от каждого числа последовательности — по крайней мере одной цифрой.

Невозможно также, чтобы эта дробь отличалась от какого-то числа контрпримера только формой и не отличалась бы величиной. Единственными числами, обладающими таким двуличием, являются те числа, в которых, начиная с определенного места, повторяются одни только нули либо одни только единицы. А наше с вами число состоит только из цифр 1 и 2.

Итак, едва только мы попробовали образовать из действительных чисел единую последовательность, то есть выстроить действительные числа в пары с натуральными числами 1, 2, 3, 4, 5... , как тотчас обнаружилось, что существуют числа, которые оказываются вне последовательности. Таким образом, мощность множества действительных чисел превышает мощность множества натуральных чисел. Если мы не будем ограничиваться числами, начинающимися с 0 целых, то утверждение наше будет тем более справедливым.

Мы рассматривали сейчас множество рациональных и иррациональных чисел, взятых вместе. Что до рациональных чисел — мы уже знаем, что они образуют перечислимое множество, то есть их можно выстроить в последовательность. Если бы иррациональные числа также удалось выстроить в последовательность, то легко можно было бы объединить обе эти последовательности в одну, выбирая попеременно из каждой последовательности по одному элементу. (Последовательности положительных и отрицательных чисел

1, 2, 3, 4, 5,...

и

—1, —2, —3, —4, —5, ...

можно объединить в одну последовательность, например, так:

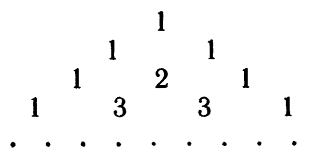
1, —1, 2, —2, 3, —3, 4, —4, 5, —5, ...)

Объединенная последовательность рациональных и иррациональных чисел содержала бы все действительные числа, а мы только что убедились в невозможности этого. Следовательно, из иррациональных чисел также нельзя образовать охватывающей все эти числа последовательности, и множество иррациональных чисел также не может быть перечислимо. Его мощность превышает мощность множества рациональных чисел.

Поэтому введение иррациональных чисел не является простым заполнением каких-то брешей в плотном множестве рациональных чисел. Напротив, иррациональные числа располагаются на числовой прямой непрерывно. Рациональные же числа, несмотря на всю свою плотность, всего лишь не слишком щедро натыканные в этом тесте изюминки. Здесь можно провести сравнение с воображаемым эфиром, который — как когда-то думали — должен был без всяких пробелов заполнять земную атмосферу; и тогда можно было бы сказать, что присутствующие повсюду молекулы воздуха лишь «распылены» в эфире.

13. „Температурные кривые" разглаживаются

Погашая долги из предыдущих разделов, я должна вернуться к одинокой единичке в вершине треугольника Паскаля:



Мы обнаружили в свое время, что, начиная со вто-

рой строки, суммы выражений в каждой строке соответственно равны

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots .$$

Если бы к этому упорядочению добавить верхнее число 1, то пришлось бы поставить ему в соответствие значение 2^0. Однако до сей поры 2^0 не имело никакого смысла — нельзя же, в самом деле, взять число 2 в качестве сомножителя 0 раз! Да мы и не сталкивались до сих пор с необходимостью придавать этому выражению какой-либо смысл.

Займемся снова возведением в степень. Вспомним, что умножение степеней одного и того же числа — дело в высшей степени простое: достаточно только сложить показатели. Например:

$$3^2 \cdot 3^4 = \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^6 \text{ и } 6 = 2 + 4.$$

Точно так же легко выполнять и другие действия, если приходится иметь при этом дело только со степенями одного и того же числа. Например,

$$\frac{3^6}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3}.$$

Если мы произведем сокращение на $3 \cdot 3$, то получим

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4.$$

Таким образом,

$$\frac{3^6}{3^2} = 3^4 \text{ и } 4 = 6 - 2,$$

то есть деление можно выполнять, вычитая показатели степеней. Далее,

$$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{3 \cdot 3} \cdot \underline{3 \cdot 3} = 3^8 \text{ и } 8 = 2 \cdot 4.$$

Значит, если мы хотим возвести степень в степень, то достаточно попросту перемножить показатели.

Логарифмические таблицы

Исходя из этого, полезно составить таблицы степеней одного и того же числа. Возьмем, например, в ка-

честве основания число 2. Степени числа 2 легко подсчитать:

$2^1=2$;	$2^7=128$;
$2^2=4$;	$2^8=256$;
$2^3=8$;	$2^9=512$;
$2^4=16$;	$2^{10}=1024$;
$2^5=32$;	$2^{11}=2048$;
$2^6=64$;	$2^{12}=4096$;
	. . . .

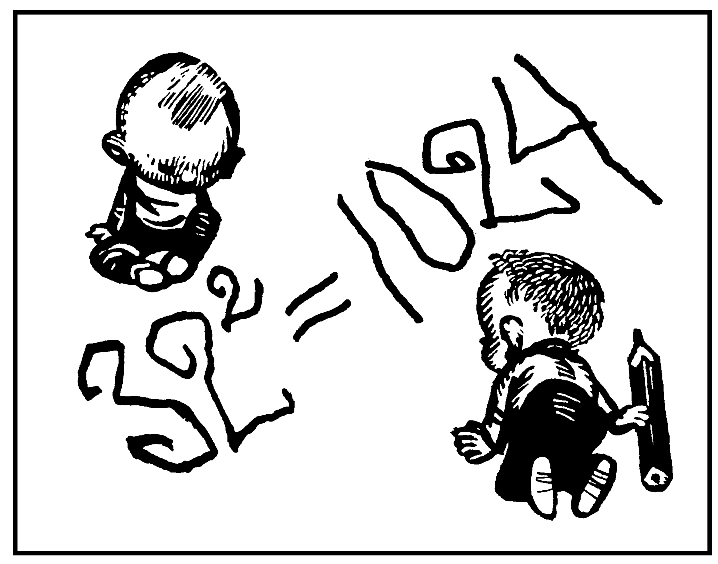
Если нам нужно перемножить два числа, то при благоприятных условиях мы можем попросту брать результат из таблицы. Например, умножим

$$64 \cdot 32.$$

Нам повезло, потому что оба эти числа содержатся в нашей таблице; соответствующие показатели равны 6 и 5. Сложение их — дело более чем простое; мы получаем 11. Достаточно лишь взглянуть на одиннадцатую строку нашей таблицы, чтобы прочесть результат

$$2048.$$

А теперь допустим, что нужно возвести в квадрат 32. Но $32=2^5$, то есть показатель равен 5; умножить его на 2 легче легкого: получаем 10. В десятой строке таблицы находим



Очевидно, это может сделать и ребенок. Жаль только, что не все числа содержатся в таблице. Полезно было бы так расширить понятие степени, чтобы все числа (например, также и 3) можно бы записать в виде степени числа 2.

Расширение понятия степени

Тем самым приходим к новому обращению, операции возведения в степень. Мы ищем теперь показатель степени, в которую нужно возвести данное основание 2, чтобы в результате получить, например, 3. Это действие мы называем логарифмированием, а результат — если он существует — логарифмом.

Наиболее неудобны действия с дробями, а дроби еще не появлялись в нашей таблице. Самая малая степень числа 2, первая, уже дает 2 целых единицы. При нашем расширении операции возведения в степень главная задача будет состоять в том, чтобы большие числа можно было представить в виде больших степеней числа 2 и чтобы благодаря этому не нужно было каждый раз в поисках ответа перерывать всю таблицу от корки до корки. Если мы хотим представить в виде степеней также и дроби, то мы должны определить степени числа 2 при показателях, меньших единицы.

Если мы отправимся вспять «целыми» шагами, то нам придется последовательно определять степени

$$2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3},\ldots$$

Расширяя таким образом действие, чрезвычайно важно обратить внимание на то, чтобы прежние правила счета оставались справедливыми, потому что никогда не нужно забывать нашей главной цели: мы хотим, чтобы правила счета при оперировании новыми числами оставались такими же удобными, как и для старых чисел.

Между прочим, следует обратить внимание на то, чтобы результат умножения данной степени числа 2 на 2^0 получился бы тот же, если бы мы добавили к показателю этой степени 0. Однако добавление 0 ничего

не меняет. Поэтому 2^0 нужно определить таким образом, чтобы умножение на 2^0 не меняло значения числа. Единственным множителем, не меняющим значений чисел, является число 1. Поэтому 2^0 (и точно так же, по тем же самым причинам, нулевую степень любого другого основания) следует определить так:

$$2^0 = 1.$$

Треугольник Паскаля, таким образом, приобретает законченность.

При определении 2^{-1} нужно принять во внимание то, что

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 2^{1+(-1)} = 2^{1-1} = 2^0 = 1.$$

Если в уравнении

$$2^1 \cdot 2^{-1} = 1$$

мы перенесем сомножитель 2^1 в качестве делителя вправо, то получим

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1}.$$

Точно так же из условия

$$2^2 \cdot 2^{-2} = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1$$

следует, что

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2},$$

а из условия

$$2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$$

следует, что должно быть

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3},$$

и так далее.

Итак, если мы хотим оставить в силе удобные правила счета, то степени с отрицательными показателями следует определить как отношение числа 1 к соответствующей степени с положительным показателем.

Как видите, наша таблица расширяется вверх и охватывает дроби:

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=1:8=0{,}125;$$

10
20
40

$$2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=1:4=0{,}25;$$

10
20

$$2^{-1}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}=1:2=0{,}5;$$

10

$$2^0= \qquad 1;$$
$$2^1= \qquad 2;$$
$$2^2= \qquad 4;$$

мы отыскали хорошее средство, которое поможет нам вести действие с дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$,... или же с десятичными дробями 0,5; 0,25; 0,125; ....

Однако все же остались большие пробелы между отдельными числами таблицы, например между $2^1=2$ и $2^2=4$. Если бы мы хотели записать в виде степени с основанием 2 какое-либо число между 2 и 4 (например, 3 или 2,7), то нам удалось бы это лишь с помощью показателя, лежащего между 1 и 2, например $1\frac{1}{2}$. Так как $1=\frac{2}{2}$, то $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, и нашей ближайшей задачей становится отыскание определения для степени с показателем $\frac{3}{2}$ и основанием 2, или же — в общем случае — с любым дробным показателем.

Следует принять такое определение, чтобы оста-

лось справедливым правило возведения степени в степень. Очевидно, им должно быть

$$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3.$$

Поэтому $2^{\frac{3}{2}}$ может быть только такое число, которое, будучи возведенным в квадрат, дает 2^3. Этим числом является $\sqrt{2^3}$. Отсюда мы получаем:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}.$$

Если подсчитать $\sqrt{8}$ с точностью до десятых, то получим 2,8. Поскольку

$$\frac{3}{2} = \underset{10}{3:2} = 1{,}5$$

и поскольку подсчеты с показателями, записанными в десятичной форме, вести гораздо удобнее, постольку между строками, содержащими 2^1 и 2^2, можно вписать новую строку

$$2^1 \;\;= 2,$$
$$2^{1,5} = 2{,}8,$$
$$2^2 \;\;= 4.$$

Наше потаенное желание не осуществилось, и мы еще не смогли выразить 3 в виде степени числа 2, однако же 2,8 лежит уже достаточно близко к числу 3. Можно доказать, что число 3 не выражается точно при помощи какой-либо степени с основанием 2 и дробным показателем, однако же можно приближенно выразить число 3 с любой точностью, пользуясь такими показателями. С помощью таких приближений определяются степени с иррациональными показателями.

Все, о чем мы только что говорили, представляет собой исходный принцип построения логарифмических таблиц. Старые логарифмические таблицы в самом деле составлялись именно таким способом. Таблицы, которые нам знакомы по школьным упражнениям,

имеют основание 10 (основание не пишется в этих таблицах; таблицы содержат только показатели). Ради игры на пальцах приходится идти на большие жертвы. Между степенями числа 10 (то есть между числами 10, 100, 1000...) находятся куда более крупные пробелы, нежели между степенями числа 2. Нужно значительно больше усилий, чтобы пробелы эти заполнить.

Многие логарифмические таблицы тоже содержат так называемые натуральные логарифмы, имеющие определенное основание *е*. Это *е* — иррациональное число, первые цифры которого — 2,71... . Но почему именно это число становится основанием натуральных логарифмов? Это можно объяснить разными способами.

Мне кажется, удобней всего сделать это так.

Число 10 — отнюдь не самое удобное основание для логарифмических таблиц; уж лучше было бы взять в качестве основания число, меньшее 2; тогда пробелы между целыми степенями основания будут еще меньше. Очевидно, при этом нельзя «спуститься» вплоть до числа 1, потому что всякая степень единицы равна единице. Выбрать число, меньшее единицы, мы также не можем, потому что, когда мы возводим в степень обыкновенную дробь, результат будет меньше самой этой дроби, например:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Возьмем в качестве пробы основание 1,1. Дело здесь упрощается тем, что степени числа 11 мы уже знаем из треугольника Паскаля, и нам нужно только не забывать, ставя запятую, что умножение на десятые доли означает деление на десять, что равноценно, в свою очередь, перемещению запятой на один порядок влево. Не будем также забывать, что нулевая степень любого числа есть 1.

$1{,}1^0 = 1;$
$1{,}1^1 = 1{,}1;$
$1{,}1^2 = 1{,}21;$
$1{,}1^3 = 1{,}331;$
$1{,}1^4 = 1{,}4641;$

. . . .

Степени эти растут очень медленно, и мы сразу получаем много чисел между 1 и 2, еще не успев заняться утомительным заполнением пробелов.

Очевидно, еще меньшее основание, расположенное еще ближе к числу 1, было бы еще лучшим. Возьмем, например, основание 1,001 (элементы треугольника Паскаля разделяются здесь парами нулей):

$$1{,}001^0 = 1;$$
$$1{,}001^1 = 1{,}001;$$
$$1{,}001^2 = 1{,}002001,$$
$$1{,}001^3 = 1{,}003003001;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Это уже просто необыкновенная плотность. Эти степени растут с такой черепашьей скоростью, что возникает сомнение, достигнут ли они вообще когда-нибудь числа 2. Можно, однако, доказать, что степени чисел, хоть немного превышающих единицу, стремятся к бесконечности, хотя и очень медленно.

У этой таблицы есть еще один небольшой эстетический изъян. Вследствие медленного роста уже небольшим числам будут соответствовать огромные показатели; лишь тысячная степень позволит нам, наконец, достичь числа 2. Показатели в тысячу раз меньше производили бы на нас более приятное впечатление. Впрочем, можно легко утешиться, возведя попросту основание 1,001 в тысячную степень. В самом деле,

$$(1{,}001^{1000})^{\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{1}{1000}} = 1{,}001^{\frac{1000}{1000}} = 1{,}001^1;$$
$$(1{,}001^{1000})^{\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{1000\cdot\frac{2}{1000}} = 1{,}001^{\frac{2000}{1000}} = 1{,}001^2;$$

и так далее. Отсюда видно, что достаточно вместо основания 1,001 использовать $1{,}001^{1000}$ и тогда можно будет в тысячу раз уменьшить показатель.

Если мы возведем в степень основание $1{,}001^{1000}$, то можно двигаться шагами длиной в одну тысячную каждый. Учитывая, что в десятичной форме

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001; \quad \frac{2}{1000} = 0{,}002; \quad \frac{3}{1000} = 0{,}003;\ldots$$

и воспользовавшись обнаруженной нами ранее зависимостью между степенями нового основания и степенями числа 1,001, мы получаем:

$$(1{,}001^{1000})^{0} = 1{,}001^{0} = 1,$$
$$(1{,}001^{1000})^{0{,}001} = 1{,}001^{1} = 1{,}001,$$
$$(1{,}001^{1000})^{0{,}002} = 1{,}001^{2} = 1{,}002001,$$
$$(1{,}001^{1000})^{0{,}003} = 1{,}001^{3} = 1{,}003003001.$$

. . . .

Здесь уже нет резкого разрыва между числами и соответствующими показателями, однако же густота осталась прежней.

Ясно, что основания

$$1{,}001^{10000};\ 1{,}00001^{100000},\ 1{,}000001^{1000000},\ldots$$

оказываются все более подходящими. Можно доказать, что эта последовательность стремится к какому-то иррациональному числу, начинающемуся цифрами 2,71... . Это иррациональное число играет в математике чрезвычайно важную роль, и оттого ему дали специальное название: число *e*. Логарифмы с основанием *e* мы называем **натуральными логарифмами**. Мы пришли к ним на самом деле натуральным, естественным способом, отыскивая все более удобные основания.

Гладкие кривые

С помощью логарифмов мы заполнили пробелы, которые еще оставались в определении степеней. Теперь степень уже имеет смысл в случае любого показателя, а не только для показателей, выраженных натуральными числами. Благодаря этому мы в состоянии дополнить очень еще неполную «температурную кривую» показательной функции. Мы уже научились обращаться с уравнениями. Поэтому можем также записать эти функции в форме уравнения. Пусть в основании по-прежнему стоит число 2, а показатель будет переменным, то есть он не является каким-то одним определенным числом, и поэтому обозначим его

через x. В зависимости от него будет изменяться также значение функции, которое мы обозначим через y.

$$y = 2^x.$$

Значение x мы будем откладывать на горизонтальной прямой (на которой теперь указываем нулевую точку и слева от нее — отрицательные числа) с помощью таких единиц: ———— . Значения же y будем откладывать по вертикали, используя такие единицы I:

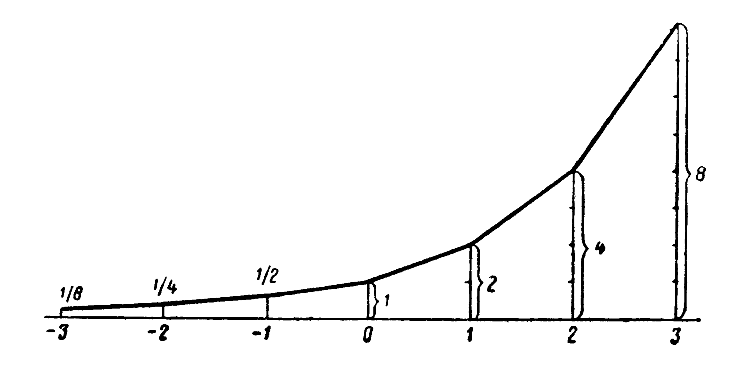
$$\begin{aligned}
&\text{Если } x = -3, && \text{то } y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8};\\
&\text{если } x = -2, && \text{то } y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4};\\
&\text{если } x = -1, && \text{то } y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2};\\
&\text{если } x = 0, && \text{то } y = 2^0 = 1;\\
&\text{если } x = 1, && \text{то } y = 2^1 = 2;\\
&\text{если } x = 2, && \text{то } y = 2^2 = 4;\\
&\text{если } x = 3, && \text{то } y = 2^3 = 8;
\end{aligned}$$

и, таким образом, в точках

—3; —2; —1; 0; 1; 2; 3

нужно отложить вверх по вертикали соответственно

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 4; 8 единиц.



Теперь можно в качестве x взять промежуточные значения. Мы знаем уже, например, что

$$2^{1\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2{,}8...$$

Так же точно можно подсчитать промежуточные значения между другими целыми числами. Если мы ограничимся десятыми долями, то получим

$$\text{для } x = -2\frac{1}{2};\ y = 0{,}2; \text{ для } x = \frac{1}{2}\ \ y = 1{,}4;$$

$$\text{для } x = -1\frac{1}{2};\ y = 0{,}4; \text{ для } x = 1\frac{1}{2}\ \ y = 2{,}8;$$

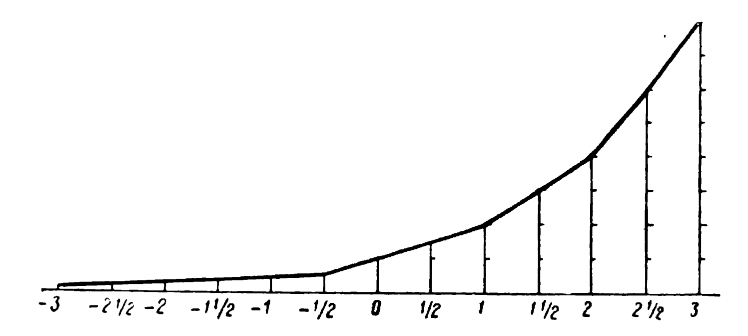
$$\text{для } x = -\frac{1}{2};\ y = 0{,}7; \text{ для } x = 2\frac{1}{2}\ \ y = 5{,}7.$$

Следовательно, можно пополнить наш рисунок, отложив вверх по вертикали в точках

$$-2\frac{1}{2};\ -1\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{2}$$

соответственно значения

0,2; 0,4; 0,7; 1,4; 2,8; 5,7.



Эта «температурная кривая» уже много меньше изломана в точках перехода. Если мы продолжим отыскание промежуточных значений для всех рациональных и иррациональных показателей, то «температурные

кривые» будут постепенно все более и более разглаживаться, приобретая форму единой плавной кривой.

Взглянув налево, мы видим, что кривая явно стремится к горизонтальной прямой, но прямой этой не достигает. В самом деле: не существует таких показателей, которые привели бы к результату $2^x=0$, а на горизонтальной прямой может лежать только такая точка, которой соответствует нулевое значение y.

Гипербола

То же самое явление можно наблюдать, изучая «температурную кривую» деления (мы пока еще не рисовали этой кривой). Пусть делимым будет, например, число 12 (хотя бы потому, что мы знаем: число 12 имеет много делителей). Делитель будет переменным, обозначаем его x. В зависимости от x будет изменяться результат деления, то есть частное; обозначим его через y.

$$y=\frac{12}{x}.$$

Если $x=-12$, то $y=\frac{12}{-12}=-1$;

так как $(-12)\cdot(-1)=+12$,

если $x=-6$, то $y=\frac{12}{-6}=-2$;

по той же причине,

если $x=-4$, то $y=\frac{12}{-4}=-3$;

если $x=-3$, то $y=\frac{12}{-3}=-4$;

если $x=-2$, то $y=\frac{12}{-2}=-6$;

если $x=-1$, то $y=\frac{12}{-1}=-12$;

если $x=1$, то $y=\frac{12}{1}=12$;

если $x=2$, то $y=\frac{12}{2}=6$;

если $x=3$, то $y=\frac{12}{3}=4$;

если $x = 4$, то $y = \frac{12}{4} = 3$;

если $x = 6$, то $y = \frac{12}{6} = 2$;

если $x = 12$, то $y = \frac{12}{12} = 1$.

Положительные значения y откладываем по вертикали вверх, а отрицательные — по вертикали вниз. Таким образом, в точках

$$-12;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1$$

нужно отложить

$$-1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -6;\ -12$$

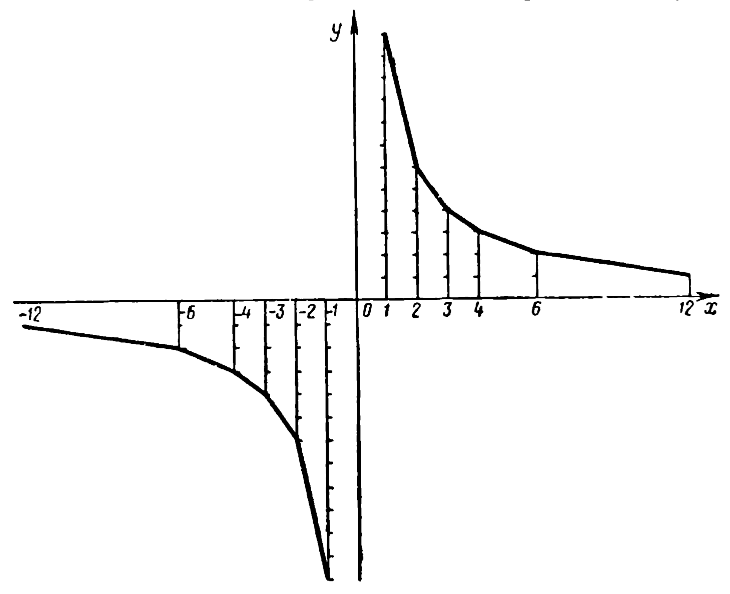
единиц вниз, а в точках

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 12$$

нужно отложить

$$12;\ 6;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1$$

единиц вверх (единица одинакова как для горизонтального, так и для вертикального направления: I):



Промежуточные значения отыскивать вовсе не обязательно, потому что кривая наша в достаточной степени плавная. Куда полезней было бы выяснить, что представляют собой концы этой кривой, каково их поведение. Чтобы ответить на этот вопрос, проведем сверху вниз через нулевую точку прямую, направленную так же, как и значения *y*. Горизонтальную прямую мы называем осью *x*, а вертикальную прямую, перпендикулярную этой оси и проходящую через нулевую точку, называем осью *y*. Мы видим, что обе части нашей кривой все ближе подходят как к оси *x*, так и к оси *y*, никогда не достигая их. Поэтому оси *x* и *y* мы называем асимптомами кривой. Если мы отправимся вдоль оси *x* все дальше вправо, то, например, для $x=24$ получим

$$y=\frac{12}{x}=\frac{12}{24}$$

и, сократив на 12,

$$y=\frac{1}{2};$$

для $x=36$ получим, снова проведя сокращение на 12,

$$y=\frac{12}{36}=\frac{1}{3};$$

для $x=48$

$$y=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$$

и так далее. Если мы будем все дальше продвигаться по оси *x*, то значения *y* будут становиться все меньше и меньше, однако никогда не получим значения, равного нулю. На сколько частей ни делили бы мы 12, всегда у этих частей будет какой-то размер. Точно так же, двигаясь в отрицательном направлении, мы получаем значения, стремящиеся к нулю, но никогда не достигающие нуля:

$$-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{4};\ \ldots.$$

Таким образом, вторая ветвь нашей кривой приближается к оси *x* снизу все ближе и ближе, но никогда этой оси не достигает.

Если теперь мы возьмем $x=\frac{1}{2}$, то достаточно вспомнить, что целое содержит две половины. Поэтому 12 целых содержит 24 половины:

$$y=24.$$

Точно так же мы получаем, что 12 содержит 36 третьих частей, 48 четвертей и так далее:

$$\text{если } x=\frac{1}{3}\text{, то } y=36;$$

$$\text{если } x=\frac{1}{4}\text{, то } y=48 \text{ и т. д.}$$

Итак, когда значения x стремятся к нулю, значения y становятся все больше и больше. Кривая никогда не достигает оси x, потому что это может произойти только тогда, когда $y=0$. Тогда мы имели бы $\frac{12}{0}$, а такое деление было бы нарушением вечного запрета: нельзя делить на нуль!

Деление на нуль

Мы проверяем деление умножением: $20:5=4$, потому что $5\cdot 4=20$. Что, однако, мы получили бы, если бы стали делить на 0? Попробуем найти ответ.

Может быть, $5:0=0$?
» » $5:0=5$?
» » $5:0=1$?

Проверяем:

$0\cdot 0=0$, а это не равно 5.
$0\cdot 5=0$, » » » 5.
$0\cdot 1=0$, » » » 5.

Какое бы число мы ни умножали на 0, в результате всегда получится 0, то есть результат всегда будет отличаться от 5. И значит, число 5 нельзя поделить на 0.

Вдумаемся в этот результат. Если какое-то число очень и очень мало, то оно содержится в числе 5 очень

много раз. Чем меньше число, на которое мы делим, тем больший получится результат. Если бы существовало самое большое число, то оно было бы результатом деления на наименьшее число, то есть на 0. Однако наибольшего из всех чисел не существует.

Может быть, по крайней мере само число 0 можно поделить на 0? Попробуем.

Может быть, $0:0=1$? Проверяем: $0\cdot 1=0$.

Казалось бы, все в порядке. Однако попробуем еще:

$$0:0=137$$

и без всякого труда убеждаемся, что мы... снова правы! Ведь $0\cdot 137$ также равняется 0. Выходит, здесь что-то не так: результат оказывается абсолютно неопределенным, ибо проверка с готовностью подтверждает каждый результат. Следовательно, запрет деления на нуль надо неукоснительно выполнять во всех случаях без исключения.

Одна веселая студенческая газета когда-то сформулировала этот запрет следующим образом: «Когда господь бог сотворил Адама и поселил его в раю, он так сказал первому человеку: ты можешь делить на любое число, но только не на нуль!»

Можно было бы подумать: никому не придет в голову делить на нуль, поскольку это столь строго запрещено. Очевидно, никто и не собирается этого делать, однако нуль появляется иногда, ловко замаскировавшись. Не каждый сразу распознает нуль в такой записи:

$$(x+2)^2-(x^2+4x+4).$$

А здесь, оказывается, из $(x+2)^2$ вычитается это же самое выражение, только в раскрытой форме. Деление на нуль, маскирующийся подобным образом, оказывается часто основой таких веселых доказательств, которые, например, приводят к результату $1=2$. Если в математике совершается только одна ошибка, если принимается в качестве истинного только одно допущение, которое противоречит всем остальным утверждениям, то отсюда уже можно вывести все что угодно, в том числе и доказать, что $1=2$.

Запомнив как следует вид только что рассмотренной нами кривой (я открою ее имя — это гипербола), мы не забудем об этом запрете. Особенно бросается в глаза то, что кривая эта состоит из двух ветвей, делится на две части. Обе ветви — гладкие и непрерывные, однако в нулевой точке оказывается вдруг резкий разрыв, растянувшаяся до самой бесконечности прореха; левая ветвь убегает в бесконечность вниз, правая — вверх. А между ними возвышается ось y, словно обнаженный меч, предупреждающий: к оси можешь приближаться, сколько твоей душе угодно, но дойти до самого нуля не позволю!

14. Существует только одна математика

Общее понятие функции

Хотя мы уже знаем, что некоторые функции можно записать в виде уравнений, однако не следует думать, что при определении функций вопрос о такой формуле самый важный. Попробуйте выразить y простой формулой в виде такой функции от x: если x — рациональное число, то y имеет значение 1, а если x — иррациональное число, то y имеет значение 0 (эту функциональную зависимость называют функцией Дирихле).

К определению этому не подкопаешься: значение y действительно зависит от того, каково значение x, и каждому значению x соответствует строго определенное значение y. Если, например, $x=1{,}5$, то $y=1$; если $x=2$, то $y=0$. Однако попробуйте отыскать формулу для этой функции! Нельзя ее, к сожалению, представить и графически, потому что колебания ее между 0 и 1 воистину бешеные: здесь как рациональные, так и иррациональные числа расположены чрезвычайно плотно.

Сущностью понятия функции является соединение в пары значения x и соответствующих им значений y. При этом x вовсе не должен принимать всех зна-

чений. О функции, определяемой уравнением $y=\frac{12}{x}$, мы уже знаем, что x здесь не принимает значения 0. Для $x=0$ функция неопределенна. Если бы мы хотели определить функцию, то нам пришлось бы:

— указать, из какого множества чисел имеем мы право выбирать значения x;

— определить, какие y следует объединять в пары с каждым x, выбранным из этого множества.

Очевидно, очень удобно представлять функцию графически. Хороший рисунок говорит больше, чем многословное описание функции.

Пусть определение функции звучит так: для любого x y должен быть равен наибольшему целому числу, содержащемуся в x. Например:

$$x=5{,}45, \qquad y=5;$$
$$x=\sqrt{2}, \qquad y=1,$$

потому что, как мы уже видели, 2=1,4...

Попробуем представить себе эту функцию:

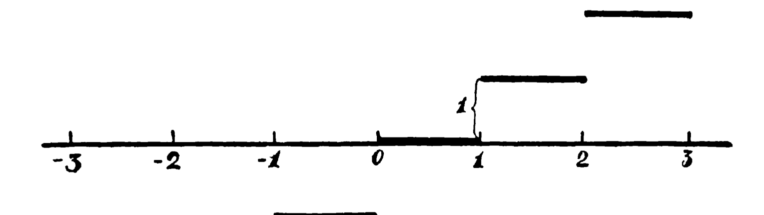
если $x=0$, то $y=0$;
» $x=0{,}1$, » $y=0$;
» $x=0{,}9999$, » $y=0$.

Очевидно, что пока x не достигнет числа 1, значение y неизменно будет равно 0. Затем,

если $x=1$, то $y=1$;
» $x=1{,}001$, » $y=1$;
» $x=1{,}99$, » $y=1$,

и, следовательно, y равняется 1 до тех пор, пока мы не дойдем до числа 2, и так далее.

То же самое будет и тогда, когда мы начнем двигаться в отрицательном направлении. Таким образом, мы получаем следующую графическую картину:



Кривая складывается из отдельных горизонтальных отрезков. Стоит бросить на рисунок беглый взгляд — и мы получаем исчерпывающую информацию о нашей функции: там, где кривая имеет разрывы, значение функции делает скачок, равный 1; на горизонтальных же отрезках значение функции остается неизменным. Как видим, функция может иметь не только бесконечные разрывы, как это было в случае функции $y=\frac{12}{x}$ для $x=0$, но и разрывы более умеренные, как в только что рассмотренном нами примере.

Графики обеих функций, по крайней мере вне точек разрыва, ведут себя как гладкие и непрерывные кривые. Функция же Дирихле не является гладкой ни в одной точке: не существует никакого интервала, столь малого, что в нем не было бы ни одной рациональной или иррациональной точки; а между такими точками функция делает скачок, равный единице.

Не следует также думать, что если функцию можно определить при помощи какой-то формулы и если мы возьмем достаточно плотные значения x, то график функции будет все более приближаться к гладкой кривой, лишенной «изломов». Допустим, что нам дано такое определение: пусть y будет для каждого x равен абсолютной величине x, то есть значению его без учета знака. (Для абсолютной величины существует специальное обозначение: перед числом и за числом мы ставим по одной вертикальной черточке; например,

$$|-3|=3;$$
$$|+3|=3$$

очевидно,

$$|1|=0.$$

Поэтому только что упомянутая функция может быть определена при помощи следующей простой формулы:

$$y=|x|.$$

Таким образом, если x пробегает точки

—4; —3; —2; —1; 0; 1; 2; 3; 4;

то y принимает соответствующие значения

4; 3; 2; 1; 0; 1; 2; 3; 4.

График будет иметь вид:

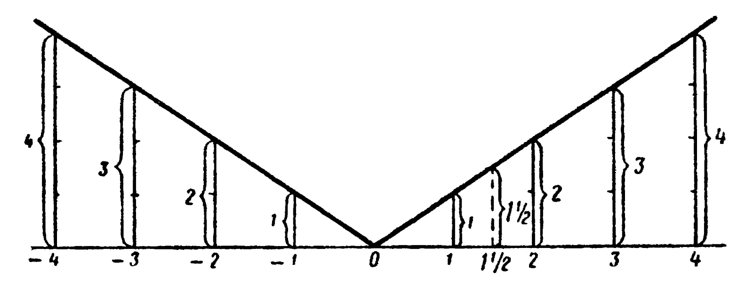


Рисунок нашей функции представляет собой две прямые линии, расходящиеся под определенным углом; мы не узнаем ничего нового, проверив какое угодно количество промежуточных значений. Если, например,

$$x = 1\frac{1}{2}, \text{ то } y = \left|1\frac{1}{2}\right| = 1\frac{1}{2}.$$

Эту величину мы обозначили на нашем рисунке пунктирной линией; точка эта также попала на одну сторону нарисованного угла.

Геометрическое изображение дает запоминающуюся картину поведения функции, хотя и не вполне точную. Наш карандаш не рисует линии с идеальной строгостью, наша линейка не является идеально прямой, наши глаза и руки также не самые точные приборы. Однако геометрия позволяет абсолютно строго судить об отдельных фигурах совершенно независимо от рисунков. Если, например, я знаю геометрические свойства гиперболы и знаю, что «картиной» функции будет гипербола, я могу считать, что знаю об $y = \frac{x}{12}$ этой функции почти все.

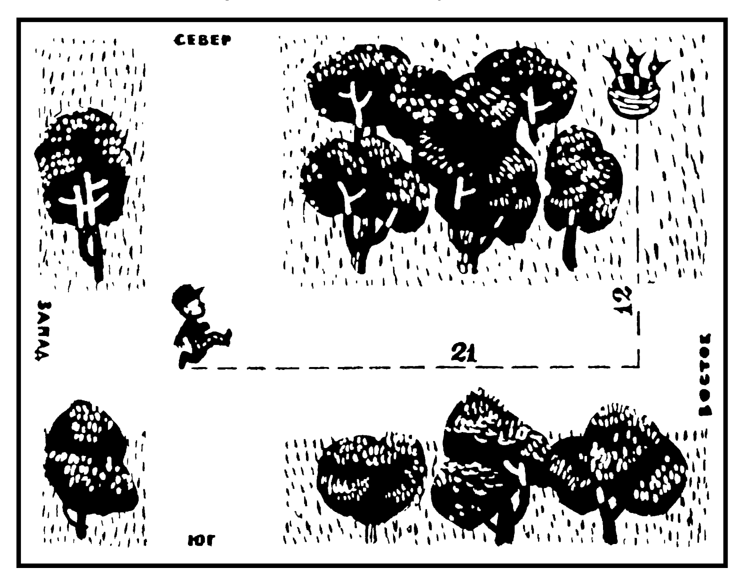
Аналитическая геометрия

Однако и геометрия часто обращается за помощью к другим разделам математики. Например, она часто прибегает к помощи формул, когда нужно представить что-то в единообразной форме. А мы уже видели, какие разнообразные проблемы можно объять одной формулой. Мы столкнулись с этим, подсчитывая площади и объемы. Существует только одна математика.

Она не распадается на две разные науки, геометрию и алгебру, как обычно рассуждают школьники, главным образом оттого, что и школьные программы и учителя делят материал таким образом, что в понедельник и в пятницу математика называется алгеброй, а в среду — геометрией. Такое разделение разбивает математику на два отдельных предмета.

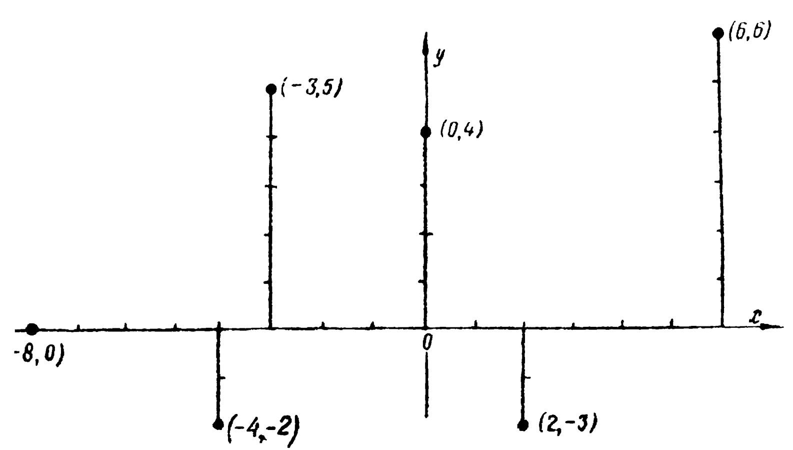
Одним из мостов, связывающих геометрию с другими разделами, является с и с т е м а к о о р д и н а т, то есть те самые две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через нулевую точку, — оси x и y, с которыми мы уже имели дело, описывая гиперболу.

Эти две прямые позволяют характеризовать точки плоскости при помощи чисел. Их можно сравнить с двумя дорогами, пересекающими луг. Если под каким-то кустом на лугу находится птичье гнездо, то можно запомнить его местоположение следующим образом: идти от гнезда прямо к одной из дорог по возможности одинаковыми шагами, считая число шагов, а затем подсчитать число шагов, которое нужно сделать, чтобы добраться до перекрестка дорог:



Если я хочу теперь показать кому-нибудь гнездо и знаю, что от перекрестка нужно сделать 21 шаг на восток, а затем 12 шагов на север, то я непременно доберусь до того места, где находится гнездо. Эти два числа, отмеряемые в определенных направлениях, являются двумя координатами искомой точки. В геометрии мы обозначаем направления знаками «+» и «—», причем в соответствии с общепринятым правилом считаем направления вверх и вправо положительными, а направления вниз и влево — отрицательными. Вместо шагов принимаем некоторую определенную единицу длины и измеряем координаты при помощи этой единицы. Таким образом, каждой точке плоскости соответствует определенная пара чисел, и каждой паре чисел соответствует определенная точка. Путь, который следует пройти в направлении оси x, называется абсциссой точки; ее мы всегда пишем на первом месте. Путь, пройденный вдоль оси y, называется ординатой точки.

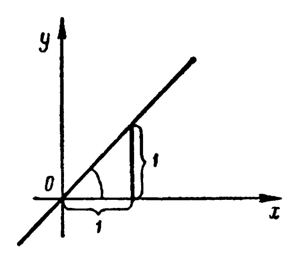
Напишем рядом с несколькими точками их координаты, нам нужно как следует с ними освоиться:



(Очевидно, связать точки и числа можно не только этим способом. Можно, например, представить себе, что дороги не взаимно перпендикулярны. Несмотря на это, мы сможем отлично ориентироваться, если бу-

дем двигаться в направлениях, обозначаемых направлениями этих дорог. Более того, может оказаться, что на лугу только одна дорога и на дороге этой находится, например, дерево. Я могу отсчитать шаги от куста прямо до этого дерева и, вернувшись, легко отыскать гнездо, если у меня будет прибор, который позволит установить, в каком направлении от дерева находится этот куст.)

Если точки определены при помощи пар чисел, то тем самым у нас появляется возможность соединить линией соответствующие числовые пары, то есть провести линию, характеризующую уравнение. Возьмем прямую, проходящую через начальную точку и через точку (1,1):



Если бы мы представили себе эту прямую в виде железнодорожной насыпи, то уклон насыпи был бы

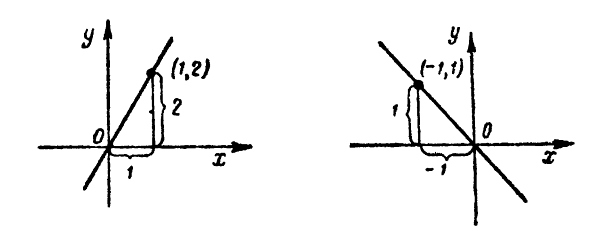
$$1:1.$$

Это значит, что насыпь становится на 1 метр выше тогда, когда мы продвигаемся на 1 метр по горизонтали вдоль насыпи. Поскольку уклон насыпи равномерный, на расстоянии 2 метров высота насыпи будет равняться 2 метрам, на расстоянии 3 метров — 3 метрам и так далее. Поэтому все точки, лежащие на нашей прямой, отличаются тем свойством, что координаты их одинаковы. В любой такой точке

$$y=x.$$

Вне нашей прямой нет на плоскости ни одной точки, у которой были бы одинаковые координаты. Если мы свяжем любую другую точку с начальной, нуле-

вой точкой, то получим наклон более крутой или же более пологий:



Наклон в первом случае равен 2 : 1; поэтому ордината каждой точки прямой, изображенной на первом рисунке, в два раза больше абсциссы. На другом рисунке наклон выражается отношением 1 : 1, однако в этом случае мы имеем дело со спуском, а не с подъемом. Степень наклона этой прямой в нашей системе координат следовало бы определить как 1 : (—1). Мы видим, что координаты любой точки этой прямой равны по абсолютной величине, но всегда имеют противоположные знаки, то есть не равны.

В самом деле, координаты точек, лежащих вне нашей первоначальной прямой, не могут быть равны друг другу. Уравнение

$$y = x$$

полностью характеризует точки нашей прямой, и только ее одной. Поэтому мы имеем право сказать, что уравнение это представляет собой уравнение нашей прямой.

По ходу дела мы обнаружили, что две другие прямые, которые мы рисовали, имеют такие уравнения:

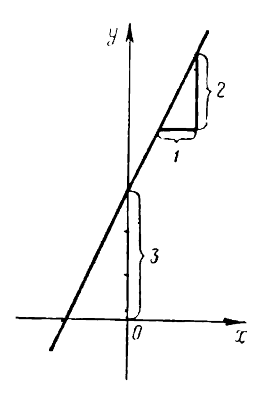
при наклоне 2 : 1 $y = 2x$,

(с этим уравнением нам еще придется иметь дело, давайте же запомним его), а

при наклоне 1 : (—1) $y = -x$.

Передвинем теперь прямую, имеющую наклон 2 : 1,

немного вверх, например, на 3 единицы; при этом не будем менять направления прямой:



Наклон этой прямой также не меняется. В этом можно убедиться, отойдя из какой-либо точки прямой на одну единицу вправо. Мы увидим тогда, что склон поднялся над нами на две единицы. Единственная разница в сравнении с первоначальным положением состоит в том, что каждая точка оказывается на 3 единицы выше, то есть ордината каждой точки увеличивается на 3 единицы. Тот y, который перед этим был равен $2x$, теперь равняется $2x+3$; поэтому уравнение прямой в этом положении имеет вид

$$y=2x+3.$$

Общим свойством полученных нами до сих пор уравнений

$$y=x; \quad y=2x; \quad y=-x; \quad y=2x+3$$

является тот факт, что все это уравнения первой степени с двумя неизвестными. Этих неизвестных именно два: ведь точки определяются при помощи двух координат.

Совершенно необходимо как можно более четко уяснить, что прямой в любом положении всегда соответствует уравнение **первой степени**. Имеет место также и обратное утверждение: можно показать, что каждое уравнение первой степени с двумя неиз-

вестными, каким бы образом оно ни было записано, например,

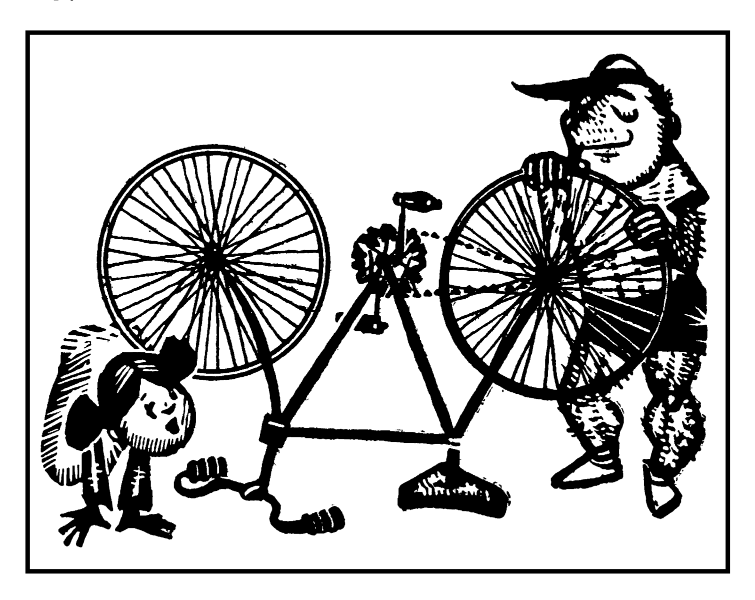
$$5x-3y=7,$$

всегда можно рассматривать как уравнение какой-то определенной прямой.

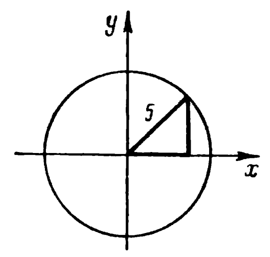
Уравнения первой степени и прямые линии оказываются всего лишь двумя разными представлениями одного и того же понятия.

Это очень изящный результат, но в нем нет ничего сногсшибательного. Хотя число способов, какими могут располагаться прямые линии, не счесть, все же прямые всегда остаются прямыми, они принадлежат к одной семье. Поэтому совершенно естественно, что их уравнения также образуют определенное семейство уравнений.

Займемся теперь какой-либо кривой линией. Кто не знает окружности! Представим себе, например, колесо велосипеда со множеством спиц, имеющих одинаковую длину. Спицы эти не что иное, как радиусы окружности:



Пусть каждый радиус имеет 5 единиц длины, и пусть центр окружности находится в начальной точке системы координат:



Если мы возьмем любую точку на границе круга, то, нарисовав координаты этой точки и проходящий через эту точку радиус, мы получим прямоугольный треугольник. Координаты будут катетами, радиус — гипотенузой.

Вспомним, что мы уже знаем зависимость, которая существует между катетом и гипотенузой; о зависимости этой нам говорит старая добрая теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Если мы теперь возведем в квадрат координаты любой точки, лежащей на окружности, а затем сложим эти квадраты, то получим $5^2=25$.

$$(x^2+y^2=25).$$

Это и будет уравнением нашей окружности. Сразу видно, что оно второй степени, и притом не самого простого вида.

Посмотрим, какая кривая соответствует самому простому уравнению второй степени, то есть уравнению

$$y=x^2$$

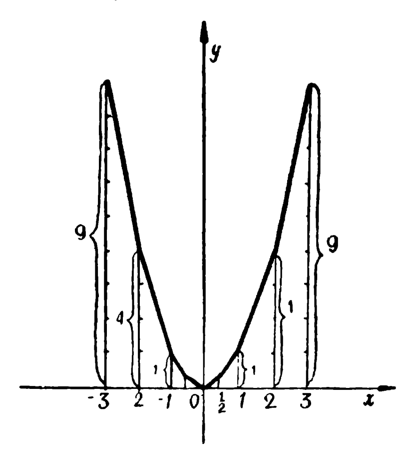
Если $x=-3$, то $y=(-3)^2=+9$;
» $x=-2$, то $y=(-2)^2=+4$;
» $x=-1$, то $y=(-1)^2=+1$;
» $x=0$, то $y=0^2=0$;
» $x=1$, то $y=1^2=1$;
» $x=2$, то $y=2^2=4$;
» $x=3$, то $y=3^2=9$.

Возьмем еще промежуточные значения, по крайней мере вблизи нуля.

$$\text{Если } x = \frac{1}{2}, \text{ то } y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$x = \frac{1}{2}, \text{ то } y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

На рисунке это будет выглядеть так:



Кривая, которая получится после того, как ломаная линия полностью разгладится, носит название параболы. Обе ее половины уходят, очевидно, в бесконечность и становятся при этом все более крутыми, все более походят на вертикальную прямую. Кривая эта, как мы видим, ничем не похожа на окружность.

Мы уже сталкивались с одной кривой, которая также имеет уравнение второй степени, только мы этого не заметили. Я имею в виду гиперболу. Ее уравнение мы записали в виде:

$$y = \frac{12}{x}.$$

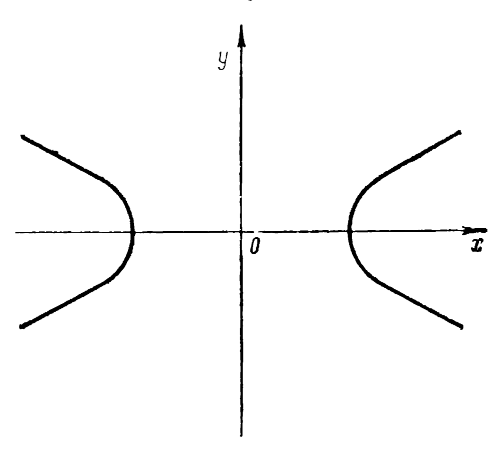
Если же мы перенесем делитель из правой части влево в качестве сомножителя, то получим

$$y \cdot x = 12.$$

Произведение же $x \cdot y$, в котором показатели обоих

сомножителей в сумме дают 2, мы рассматриваем как выражение второй степени.

Если это кому-то покажется не слишком убедительным, то я могу повернуть слегка ветви гиперболы, так, чтобы они заняли следующее положение:

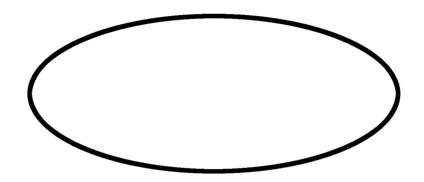


Уравнение ее примет вид

$$x^2-y^2=24,$$

а это уже, без всякого сомнения, уравнение второй степени.

Я хочу еще только напомнить, что сплющенная окружность, которая носит название эллипса, также имеет уравнение второй степени:



Других кривых, обладающих этим свойством (исключая некоторые случаи «уродства»), нет.

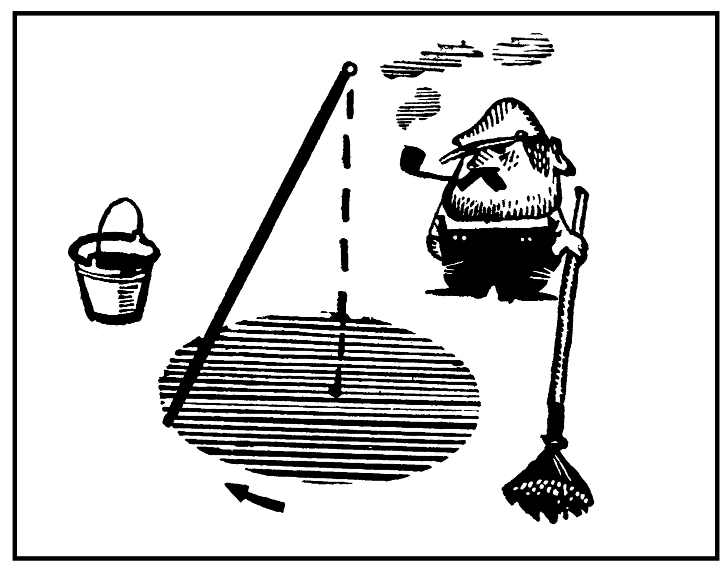
Если мы нарисуем четыре указанные нами кривые, во всех положениях относительно системы координат,

то получим семейство, которому из всех возможных уравнений соответствуют уравнения второй степени. Трудно представить себе семью, члены которой были бы до такой степени не похожи. Какова же та кровная связь, которая все же объединяет эти кривые — кривые, среди которых имеются конечные и устремившиеся в бесконечность, замкнутые и разбитые на две ветви?

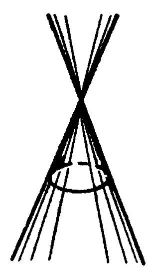
Если мы представим себе все это семейство вместе, то тотчас догадаемся, на чем основывается это родство. Наши кривые носят общее название **сечений конуса**, или **конических кривых**.

Сейчас нам придется вновь выйти из плоскости в пространство. Очень жаль, конечно, что мы не можем рисовать в пространстве так же, как на этом листе бумаги!

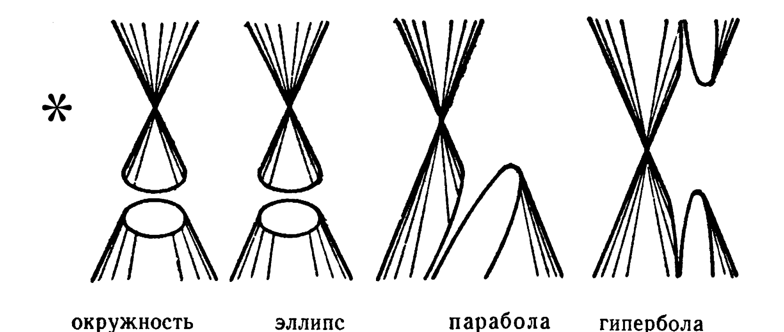
Представим себе, однако, краску, которая раскрашивает воздух. В воздухе висят горизонтальный кружок и прямая линия, наклоненная над его центром так, что какой-то точкой касается края нашего кружка:



Представим себе также, что мы окунули нашу прямую в «волшебную краску». Возьмем теперь ее в руки и, крепко ухватившись за ту точку, которая лежит непосредственно над центром круга, другой рукой ухватимся за точку соприкосновения этой прямой с границей круга и проведем ее по кругу. Тогда раскрашенная прямая нарисует как под неподвижной точкой над центром круга, так и над этой точкой некоторую поверхность, называемую **к о н и ч е с к о й п о в е р х н о с т ь ю**.



Если теперь полученный таким образом двойной конус мы будем рассекать плоскостями в разных направлениях, то в сечении появятся наши четыре кривые:



Одна лишь четвертая плоскость пересекает также и верхний конус.

Если бы мы даже и не открыли это геометрическое родство между нашими четырьмя кривыми, то одна

* – См. последнюю страницу

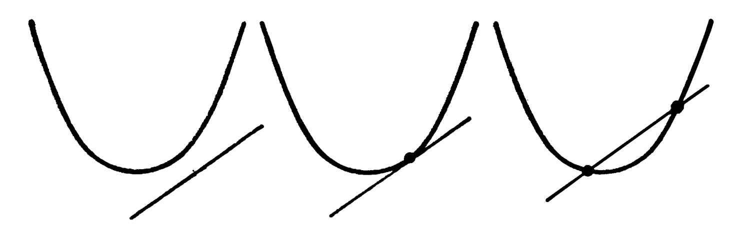
лишь та подробность, что все их уравнения имеют вторую степень, позволила бы нам вытянуть на свет божий немало их общих свойств. Нужно только задаться вопросом, что может сказать алгебра об этих уравнениях и какие из этого можно сделать выводы. Тем самым мы отыщем общие свойства наших четырех кривых.

Попробуем, например, выяснить, что можно сказать о пересечении этих кривых с какой-либо прямой. Точка пересечения — это такая точка, которая лежит одновременно как на данной кривой, так и на прямой. Поэтому координаты этой точки удовлетворяют одновременно уравнениям обеих этих линий. Уравнение прямой — это уравнение первой степени, а алгебра учит, что два уравнения с двумя неизвестными, из которых одно — первой степени, а другое — второй степени,

либо не имеют общих действительных решений,
либо имеют одно общее решение,
либо имеют два общих решения.

Отсюда для каждой из наших конических кривых можно сделать вывод, что прямая может занимать относительно нее одно из трех положений:

либо вовсе не встретиться с этой кривой,
либо встретиться с ней в одной точке,
либо пересечься с ней в двух точках:



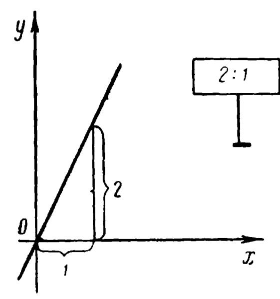
Более чем в двух точках прямая не может пересекаться даже с гиперболой, состоящей из двух ветвей.

Таковы услуги, которые может оказывать алгебра геометрии.

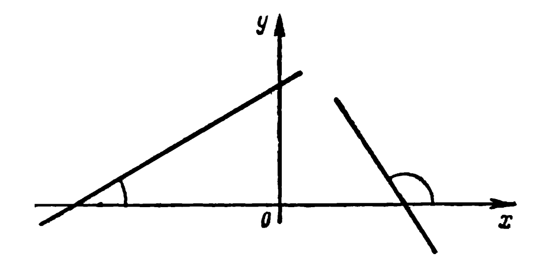
Добавление о волнах и о тени

В наших рассуждениях появилось два геометрических мотива. Мне бы не хотелось, чтобы они остались незамеченными.

Первый мотив связан со способом, которым мы определяли направление прямой. Мы установили, что это можно сделать, пользуясь отношением высоты к пройденному по горизонтали пути, то есть пользуясь отношением одного катета полученного нами прямоугольного треугольника к другому катету:



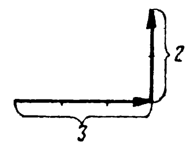
Направление будет однозначно определено также и тогда, когда мы укажем, под каким углом прямая наклонена к какому-то заранее указанному направлению. Обычно в качестве этого направления выбирается положительная половина оси x. Этот угол мы называем **углом наклона прямой**. Угол этот острый, когда прямая восходящая, и тупой, когда прямая нисходит:



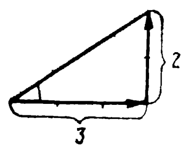
Направление, так же как и угол наклона, полностью задается отношением обоих катетов; таким образом, это отношение также может служить мерой величины угла.

Остановимся на случае острого угла, которому соответствует наклон 2 : 3; это значит, что если из любой точки, лежащей на одной стороне угла, мы проведем перпендикуляр к другой стороне, то получится прямоугольный треугольник, в котором отношение катета, лежащего против нашего угла, к другому катету равняется 2 : 3 или, в другой записи — $\frac{2}{3}$.

Если задается это отношение $\frac{2}{3}$, то сразу можно нарисовать угол. Передвигаемся на 3 единицы вправо, а затем на 2 единицы вверх:

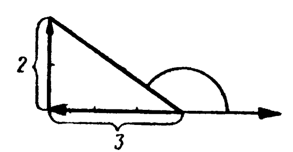


Если точку, в которую мы попадаем, соединить с исходной точкой, то искомый угол окажется построенным.



Когда мы имеем дело с тупым углом, то наш склон оказывается нисходящим, и мы уже видели, что соответствующее отношение отрицательное. Рецепт, однако же, можно оставить без изменения. Если отношение равно, скажем, $-\frac{2}{3}$, то мы знаем, что восхождение увеличивается тогда, когда мы движемся

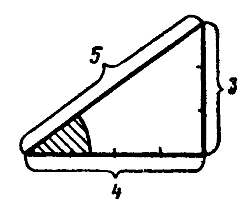
вспять, то есть влево; поэтому нужно пройти 3 единицы пути влево, а затем две единицы вверх, потом соединить точку, в которой мы оказываемся, с исходной точкой, и тогда станет ясным, что искомый угол — тупой, заключенный между проведенной через две точки линией и положительным направлением движения вперед (угол наклона всегда образуется с положительным направлением оси x).



Такой угол нельзя замкнуть в прямоугольном треугольнике. Зато слева от него появляется прямоугольный треугольник, и катеты этого треугольника имеют отношение $\frac{2}{3}$. А это не что иное, как то самое отношение, которое характеризует наш тупой угол — с тем, конечно, что мы не обращаем внимания на знак.

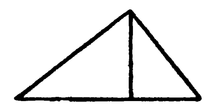
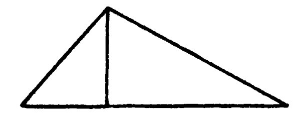
Тригонометрические функции

Можно показать, что отношение двух любых сторон треугольника полностью характеризует его углы. Такие отношения двух сторон, зависящие от рассматриваемых углов, носят название функций углов, или тригонометрических функций. Ту тригонометрическую функцию, которую мы только что рассматривали, называют тангенсом. Отношение катета, лежащего напротив данного угла, к гипотенузе — это синус угла, а отношение катета, прилегающего к данному углу, к гипотенузе — косинус угла. Например, в треугольнике

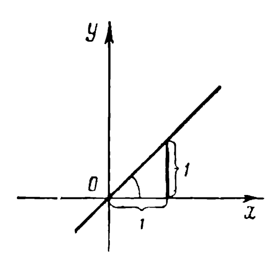


синус заштрихованного угла равен $\frac{3}{5}$, а косинус этого угла равен $\frac{4}{5}$.

Определение каждой тригонометрической функции можно расширить на случай углов, превышающих острые. Значения тригонометрических функций, соответствующих различным углам, содержатся в специальных таблицах. Если мы знаем стороны прямоугольного треугольника, — а всякий другой треугольник можно представить в виде двух прямоугольных, —

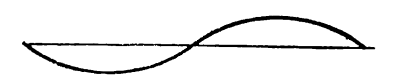
то достаточно только обратиться к таблицам, и мы тотчас будем знать, каковы углы этого треугольника. Правда, зная стороны треугольника, можно этот треугольник нарисовать и затем измерить углы. Однако точность таких измерений ничтожно мала в сравнении с точностью, которую дают нам рассчитанные составителями таблицы. Дело в том, что было бы большой ошибкой думать, что автор таблицы предлагает нам данные, полученные в результате измерений. Подсчет тригонометрических функций оказывается возможным, между прочим, по той причине, что некоторые значения этих функций мы знаем абсолютно точно; например, наша первая прямая делила прямой угол точно пополам:



и тангенс угла наклона этой прямой был равен 1 : 1, то есть $\frac{1}{1} = 1$.

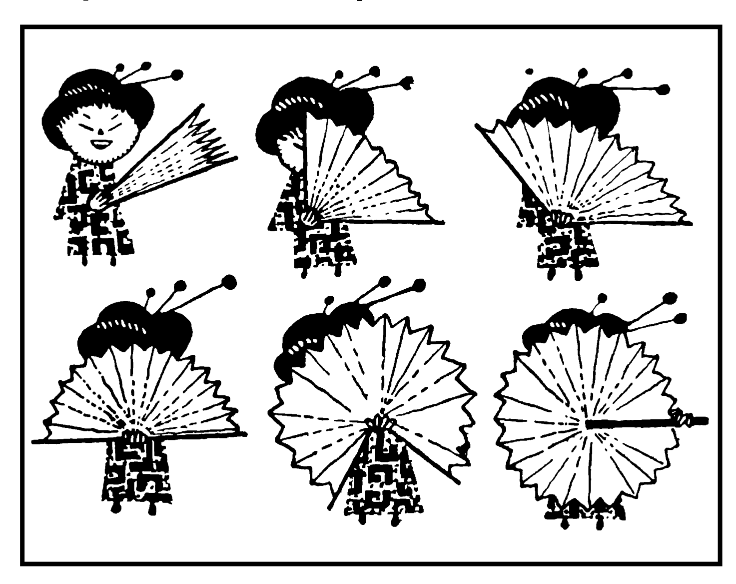
Прямой угол представляет собой одну четверть полного оборота, и, таким образом, мы уже знаем, что тангенс одной восьмой полного оборота равен единице. Если мы знаем тригонометрические функции некоторых углов, то можно поставить вопрос, как подсчитать, опираясь на эти результаты, тригонометрические функции суммы углов, или же удвоенного угла, или же половины угла. Исследование таких зависимостей и ведет тригонометрия. Однако в наше время таблицы подсчитываются иным способом; мы еще вернемся к этому вопросу.

Значение тригонометрических функций выходит далеко за рамки геометрии. Если, например, мы нарисуем «температурную кривую» для синуса, угол которого изменяется от 0 до полного оборота, то получим такую волнистую линию:

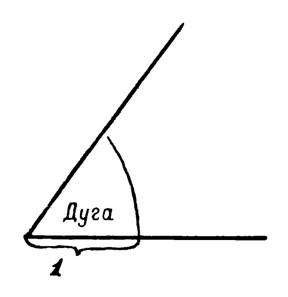


Линию эту можно продолжить как угодно далеко. Угол измеряет смещение какой-либо прямой относительно другой прямой, которая остается неподвижной.

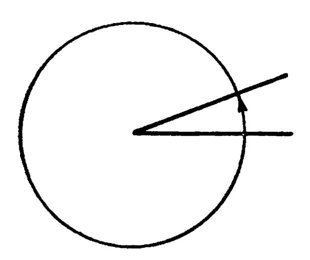
Представим себе, например, что постепенно мы раскрываем японский веер:



На рисунке показаны все возможные виды углов. Очевидно также, что величину поворота можно измерять при помощи длины дуги, заключенной между двумя сторонами угла. Длина дуги зависит, очевидно, от длины радиуса нашего веера. Мы измеряем углы длиной дуги окружности, равной длине радиуса, принятой за единицу:



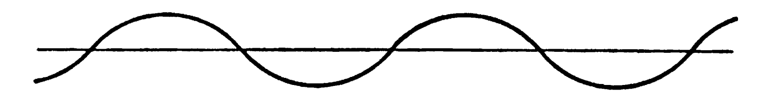
(Эта мера часто оказывается более удобной, чем деление на градусы, к которому мы привыкаем в школе.) Можно себе представить также (но брать в качестве примера веер уже не стоит — веер порвется), что движущаяся прямая, сделав полный оборот, продолжает вращаться:



так что путь, обозначенный более жирной линией, проходится второй раз. Ясно, что, остановившись, прямая займет то же самое положение, которое заняла бы, пройдя всего лишь малую дугу:



Поэтому значения тригонометрических функций повторяются для углов, превышающих полный угол; форма кривой повторяется:



Это очень похоже на повторение периодов в десятичном разложении дроби; поэтому мы говорим, что синус является *периодической функцией*.

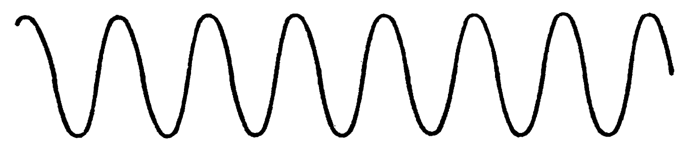
Аппроксимация (приближение) периодической функции

Любой физик хорошо знаком с этими кривыми. Они представляют собой «портреты» колебаний и

имеют огромное значение в современной физике. Если кто-то из читателей хоть немного интересовался радио, то он не мог не встретить рисунок такой «модулированной» волны:



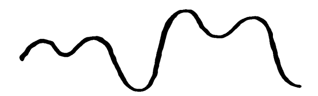
Густые волны соответствуют так называемой электромагнитной волне. В чистом виде она имеет такую форму:



Однако в нашем случае эта волна модулируется вот такими длинными звуковыми волнами:

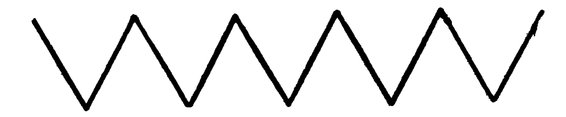


Здесь еще можно отчетливо распознать обе волны, из которых слагается новая модулированная волна. Однако же в действительности звуковые волны не так просты. Нет абсолютно чистых звуков, всегда звучат несколько тонов одновременно, и разница между ними не столь велика, как разница между электромагнитными и звуковыми волнами. Эти мало разнящиеся волны уже не могут играть столь различную роль. Их наложение попросту уродует волну; изуродованная волна может выглядеть таким образом:



Часто возникает необходимость «прочесть» по такой изуродованной волне, из каких отдельных волн она складывалась. Вообще сам собой напрашивается вопрос: если у нас есть непрерывная кривая, искаженная каким угодно образом, и мы знаем, что она периодическая, то нельзя ли отыскать простые волны, совместное действие которых дало такую кривую?

Ответ таков: хотя и нельзя сделать этого абсолютно точно, однако можно отыскать волны, которые при наложении друг на друга будут приближаться к нашей кривой. Приближаться, даже если будут складываться из кусочков, образующих изломы, — например, если кривая будет складываться из таких прямолинейных отрезков:

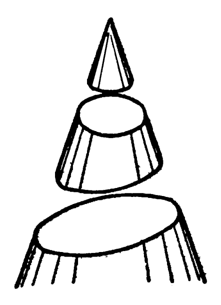


Доказать это можно, воспользовавшись языком функций. Тогда говорить мы будем не о волнах, а о тригонометрических функциях, соответствующих этим волнам.

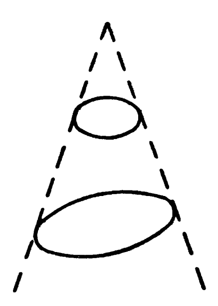
Другой геометрический мотив связан с сечениями конуса.

Проективная геометрия

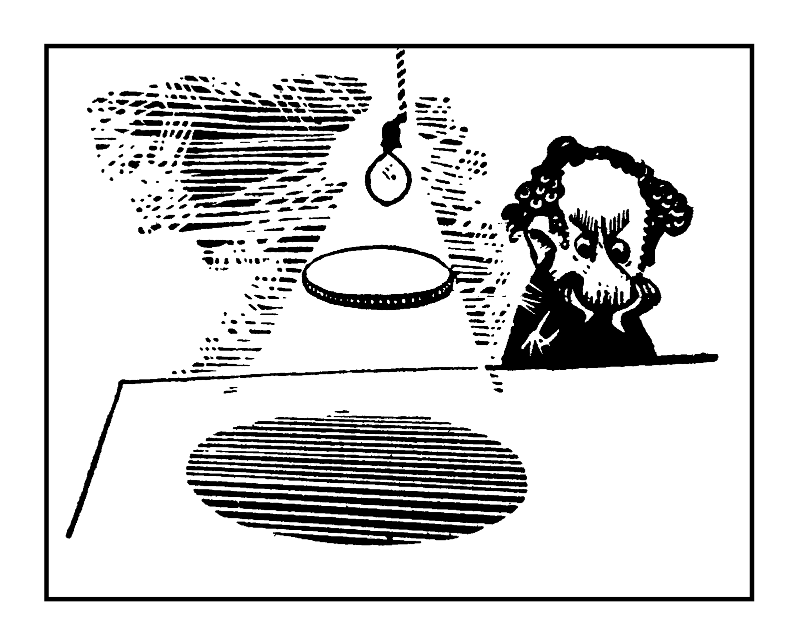
Перережем дважды коническую поверхность — сначала горизонтальной плоскостью, а затем слегка



наклоненной и нарисуем отдельно вершину конуса, окружность и эллипс:



Представим себе теперь, что вершина конуса — это крошечная лампочка, распространяющая лучи света во всех направлениях. Допустим, что круг — это непрозрачный листок бумаги, помещенный на пути лучей света. Лучи соскальзывают с краев круга и образуют коническую поверхность, а круг бросает тень, имеющую форму эллипса, на находящуюся под ним наклонную плоскость:



Эллипс можно рассматривать как тень круга: возникает он при проецировании круга из определенной точки на наклонную плоскость.

То же самое проецирование дает тень в виде параболы или гиперболы, если мы еще больше наклоним плоскость (если мы хотим получить также и вторую ветвь гиперболы, то нужно установить на пути лучей, стремящихся вверх, также и второй кружок). Оказывается, что тень может иметь весьма искаженную форму.

Так называемая *проективная геометрия* занимается теми свойствами фигур, которые не изменяются даже при уродовании этих фигур, вызванном проектированием. Можно отыскать такие проективные свойства, которые при проектировании остаются неизменными. Благодаря этому мы получаем возможность исследовать конические сечения с другой стороны: достаточно попросту заняться нашим старым добрым кругом. Все его проективные свойства без изменения переносятся на другие конические сечения,

которые представляют собой не что иное, как проекции нашего круга. Тень конечной фигуры может растягиваться до самой бесконечности и, несмотря на это, не может вовсе сбежать от своего хозяина.

15. Элементы Киже

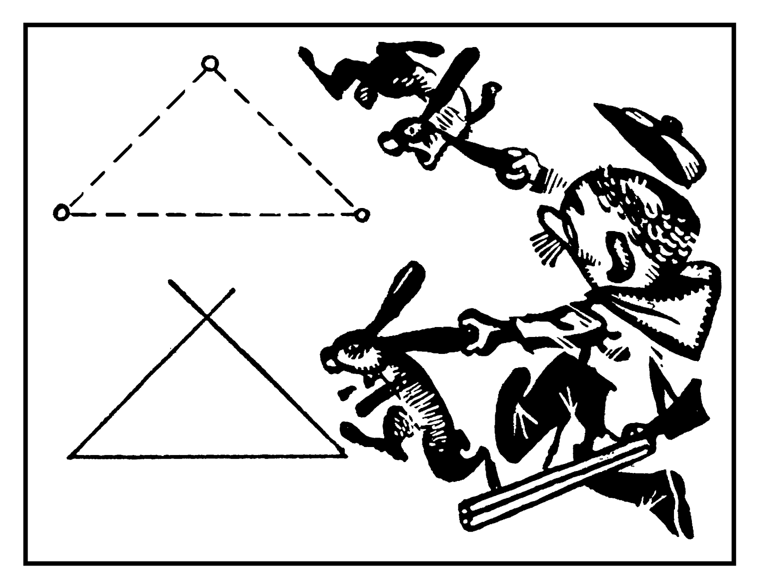
Все знают повесть Юрия Тынянова «Подпоручик Киже». Сюжет этой повести основывается на том, что писарь-новичок, составляя для императора Павла I приказ по Преображенскому полку, сделал ошибку, вернее, описку, и внес в список имя «подпоручика Киже». Произошло это оттого, что писарь не вовремя пробормотал себе под нос слова «поручики же». Поскольку список оказался утвержденным царем-самодержцем, никто не отважился заявить, что офицера по имени Киже в природе не существует. «Подпоручик Киже» не был человеком, он был всего лишь опиской. Между тем вокруг него начинает плестись сеть интриг, а сам он попадает в самые невероятные переделки: его сажают в каземат, он женится и даже имеет детей, вызывает чей-то гнев и самым серьезным образом влияет на жизнь окружающих.

Прямая в бесконечности

Такие несуществующие и, однако, играющие важную роль элементы Киже можно встретить также и в математике. Здесь они называются идеальными элементами. К ним относится, например, бесконечно удаленная точка, в которой пересекаются параллельные прямые. Без этой точки здание геометрии было бы недостроенным.

В самом деле, можно доказать, что в отношениях между точками и прямыми существует своего рода двойственность: некоторые утверждения, касающиеся точек и прямых, остаются справедливыми, если мы в формулировках этих утверждений слово «точка» заменим словом «прямая» и, наоборот, вместо «прямая» будем говорить «точка». Обратимся к примеру. Три точки, не лежащие на одной и той же прямой,

определяют треугольник. Сомневаться в этом не приходится. Двойственное утверждение гласит: три прямые, не проходящие через одну и ту же точку, определяют треугольник:



Такая двойственность — очень удобная штука. Не правда ли, что может быть лучше: доказываешь какое-то утверждение и тем самым сразу получаешь еще одно утверждение — близнеца. Оказывается, что пословица о двух зайцах допускает исключения.

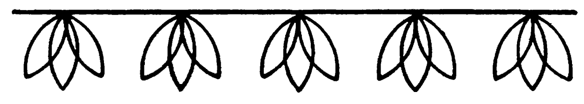
Все это так. Однако у проблемы двойственности обнаруживается уже на этом простом примере существенный изъян. В самом деле, при формулировке принципа двойственности мы должны были добавить: если прямые не параллельны. В таком случае необходимо сказать: параллельные прямые были исключены уже из формулировки предыдущего утверждения потому, что они встречаются в единственной бесконечно удаленной точке.

Эта бесконечно удаленная идеальная точка может оказать нам помощь при решении задач куда более

серьезных, чем задача устранения неприятного «если». Если прямым, направленным одинаково, то есть параллельным, мы припишем одну общую бесконечно удаленную точку, а прямым, имеющим различное направление,— различные бесконечно удаленные точки, то тем самым получим столько бесконечно удаленных точек, сколько существует направлений.

Можно всегда точно определить, какую именно из этих точек мы имеем в виду: достаточно только указать стремящееся к этой точке направление. Если мы слегка изменим наши координаты, то окажется возможным даже написать уравнение той линии, на которой лежат все бесконечно удаленные точки. Оказывается, уравнение это имеет такой же вид, как и уравнение прямой линии. Поэтому мы говорим, что все бесконечно удаленные точки лежат на бесконечно удаленной прямой.

Пока все это кажется пустой забавой. Мы можем написать уравнение прямой, которой не существует. Может быть, было бы даже лучше, если бы мы и не пытались ее себе представить. Каждая прямая линия уходит в бесконечность в двух направлениях, однако мы приписываем ей одну только бесконечно удаленную точку (благодаря этому двойственность полностью сохраняется; две идеальные точки вновь нарушили бы эту двойственность). Положение таково, что два конца прямой встречаются в бесконечности, как если бы прямая в бесконечности становилась похожей на окружность. Поэтому наши растягивающиеся в обоих направлениях прямые напоминают окружности и висят, прицепившись к отдельным точкам бесконечно удаленной прямой наподобие плодов на ветке, причем параллельные прямые «растут» в одной и той же точке:



Конечно, никто нам не давал права рисовать бесконечно удаленную прямую в виде обыкновенной прямой линии, да ведь, с другой стороны, кто же

знает, как ее рисовать? У нее одна точка — одновременно на востоке и на западе, в другой ее точке встречаются север и юг и так далее.

Однако мы об этом уже не думаем; это не относится к тому миру, который можно «потрогать»; «подпоручик Киже» — это всего лишь описка.

И все же, что может сделать эта бесконечно удаленная прямая? Ее уравнение мы уже знаем. Поэтому мысль — а не отыскать ли нам точки пересечения этой прямой, например, с параболой?—вовсе не такая уж смелая. Все, что от нас при этом требуется,— это отыскать общие решения обоих уравнений. И вдруг оказывается, что бесконечно удаленная прямая, на которую мы пока смотрели как на нечто весьма сомнительное и путаное, проливает свет на конические кривые.

В самом деле, было бы странно, если бы нам не захотелось отыскать ответ на такой вопрос: можно ли, имея уравнение второй степени с двумя неизвестными, выяснить, какого рода конической кривой это уравнение соответствует?

Ответ дает бесконечно удаленная прямая. Если ее уравнение не имеет общих решений с уравнением данной кривой, то мы имеем дело с эллипсом, если оба уравнения имеют одно общее решение, то речь идет о параболе, если же общих решений два, то неизвестная кривая является гиперболой. Других возможностей нет. (Круг же — лишь частный случай эллипса.)

Теперь можно совершенно спокойно дать волю воображению. Мы получаем результат, целиком и полностью соответствующий нашим представлениям. Эллипс целиком лежит в «конечной части» плоскости и, очевидно, не имеет никаких общих точек с бесконечно удаленной прямой. Оба плеча параболы становятся все более крутыми, все более похожими на две параллельные прямые; а отсюда вполне понятно, что встречаются они в одной бесконечно удаленной точке.

Ветви же гиперболы проходят вдоль двух прямых, имеющих различные направления; поэтому они должны прийти в две различные точки в бесконечности.

Итак, разве не совершили бы мы ошибку, не дав право голоса этим несуществующим точкам?

А теперь мы уже можем набраться смелости и подступиться к последнему нерешенному вопросу — именно к уравнению второй степени, имеющему вид

$$x^2 = -9.$$

Комплексные числа

Число, которое, будучи возведенным в квадрат, дало бы нам —9, следовало бы обозначить символом $\sqrt{-9}$, если бы такое число существовало, конечно. Однако до сих пор нам не встретилось ни одного числа, имеющего отрицательный квадрат. Возводим ли мы в квадрат —3 или +3, в результате все равно получается +9. Точно так же мы не знаем, чему должен быть равен $\sqrt{-1}$. Если мы кого-то об этом спросим, нам могут ответить: «и... сколько это будет, я не знаю». Предположим, что «и», с которого начинался этот ответ, тянулось так долго, что кто-то с тем же усердием, которым отличался писарь времен императора Павла, записал начало этого ответа, приняв «и» за сам ответ; притом, ведь если речь идет о математике, то всякий будет записывать обозначения латинскими буквами, — записал так:

$$\sqrt{-1} = i.$$

Теперь тот, кого мы спрашивали, может спокойно заявить нам: «В таком случае я уже могу сказать, чему равняется $\sqrt{-9}$; этот корень равен всего-навсего $3i$; впрочем, он может также быть равен и $-3i$». И нам уже нечего возразить. Если $\sqrt{-1} = i$, то i было бы тем самым числом, которое, будучи возведено в квадрат, дало бы — 1:

$$i^2 = -1,$$

и поэтому было бы также:

$$(+3i)^2 = 3i \cdot 3i = 9i^2 = 9(-1) = -9,$$

а также:

$$(-3i)^2 = (-3i) \cdot (-3i) = 9i^2 = 9 \cdot (-1) = -9.$$

Плохо только то, что число i на самом деле не существует — оно лишь плод недоразумения, описка. Мы так и не знаем, чему равняется —1.

Поскольку мы допустили эту описку, попробуем все же немного ею заняться — так, как мы сделали это только что, отыскивая $\sqrt{-9}$. Кто знает, может быть, этот несуществующий элемент поможет нам получить какие-либо важные результаты?

И оказывается, что при помощи этого элемента можно совершить истинные чудеса! На нем основывается теория функций, самая достойная и самая благородная ветвь математики. Если мы не желаем иметь дела с i, то нужно вовремя и достаточно точно объявить, что мы собираемся заниматься теорией функций действительного переменного. Вообще же нет раздела математики, в котором не использовалось бы это самое i, особенно там, где приходится говорить о чем-либо серьезном. Даже геометрия не составляет исключения. Магический элемент i увенчивает стремление придать единство всем противоречивым утверждениям.

Мы договорились не пользоваться формулами, и поэтому я дам только слегка вкусить от этого плода; вообще же идеальные элементы по-настоящему оживают именно благодаря своей форме.

Если мы согласимся использовать символ i, то выявляются такие зависимости между отдельными функциями, которых мы и во сне не видывали.

Зависимость между тригонометрическими функциями и показательной функцией

Кто бы мог подумать, что существует какая-то зависимость между тригонометрическими функциями и показательной функцией?

И вот оказывается, что можно доказать такую вещь. Если мы будем измерять угол при помощи длины соответствующей дуги круга с единичным радиу-

сом, то, например, косинус угла, насчитывающего 2 единицы (короче cos 2), выражается зависимостью

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2},$$

где e — основание натуральных логарифмов. Аналогичные формулы можно получить для каких угодно углов:

$$\cos 3 = \frac{e^{3i} + e^{-3i}}{2},$$

$$\cos 4 = \frac{e^{4i} + e^{-4i}}{2}$$

и так далее.

Каким, однако, образом косинус угла, то есть отношение двух отрезков, вполне благопристойное, действительное число, может оказаться равным несуществующему числу, стоящему в правой стороне формулы?

Дело, однако, в том, что справа у нас стоит обычное действительное число. При выполнении действий i появляется из какого-то призрачного мира, проливает свет на существующие зависимости и — снова исчезает.

То же самое можно наблюдать в играх на отгадывание чисел.

«Задумай число, помножь его на 3, добавь к результату еще 4, полученный результат удвой и затем отними от последнего числа задуманное число, помноженное на 6».

Я жду, пока партнер кончит подсчеты, и затем, не задавая никаких дополнительных вопросов, говорю ему, что он получил в результате 8. Ход расчетов можно описать следующим образом. Задуманное число равно x; взятое трижды, оно дает $3x$; добавляем 4 и получаем $3x+4$; увеличив этот результат вдвое, мы будем иметь $2 \cdot (3x+4)$. Наконец, нужно вычесть из полученного на последнем шаге числа шестикратно взятое задуманное число, то есть $6x$.

Мы получаем:

$$2 \cdot (3x+4) - 6x.$$

Помножим $3x+4$ на 2, умножая на 2 каждое слагаемое; результат будет таков:

$$6x+8-6x,$$

или же, записывая это выражение в другой последовательности:

$$8+6x-6x.$$

Если к числу 8 прибавим $6x$, а затем отнимем то же самое, то в итоге у нас останется то же число 8. Задуманное число участвует в расчетах, а затем исчезает.

Из зависимости между тригонометрическими функциями и показательной функцией можно получить такие связи, в которых уже и следа не останется от i. Подсчитаем, например, из равенства

$$\cos 2 = \frac{e^{2i} + e^{-2i}}{2}$$

квадрат cos 2.

Чтобы не возиться с дробями, перенесем сначала делитель 2 из правой половины влево в качестве множителя

$$2 \cdot \cos 2 = e^{2i} + e^{-2i}.$$

Возведем теперь обе стороны в квадрат. Квадрат левой стороны равен

$$(2 \cdot \cos 2)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (\cos 2)^2$$

(у меня есть свои соображения, чтобы забыть на время, что $2 \cdot 2 = 4$).

Справа у нас — сумма двух выражений. Возведем ее в квадрат, подсчитывая сначала квадрат первого выражения; при этом будем иметь в виду, что, возводя степень в степень, мы перемножаем показатели

$$(e^{2i}) = e^{4i}.$$

Затем добавляем сюда удвоенное произведение обоих выражений, вспоминая при этом, что степени числа i перемножаются путем сложения показателей и что степень с нулевым показателем имеет значение 1.

$$2\cdot e^{2i}\cdot e^{-2i}-2\cdot e^{2i+(-2i)}-2\cdot e^{0}=2\cdot 1=2.$$

Наконец, добавляем еще квадрат второго выражения: $(e^{-2i})^2=e^{-4i}$.

Таким образом, квадрат правой стороны можно записать в виде

$e^{4i}+e^{-4i}+2$, и поэтому $2\cdot 2\cdot(\cos 2)^2=e^{4i}+e^{-4i}+2$.

Перенесем теперь один из множителей 2 вправо в качестве делителя. Тогда получим:

$$2\cdot(\cos 2)^2=\frac{e^{4i}+e^{-4i}}{2}+1.$$

Не правда ли, в выражении

$$\frac{e^{4i}+e^{-4i}}{2}$$

есть что-то знакомое?

Действительно, это выражение не что иное, как $\cos 4$. Поэтому

$$2\cdot(\cos 2)^2=\cos 4+1.$$

Или же, записывая это выражение в другой последовательности, — ибо при такой записи, как наша, кто-то мог бы ошибиться, подумав, что речь идет о косинусе угла 4+1, то есть о значении $\cos 5$:

$$2\cdot(\cos 2)^2=1+\cos 4.$$

Перенесем, наконец, число 2 еще раз в качестве делителя вправо:

$$(\cos 2)^2=\frac{1+\cos 4}{2}.$$

Это одна из хорошо известных тригонометрических зависимостей; элемент i исчезает здесь без следа.

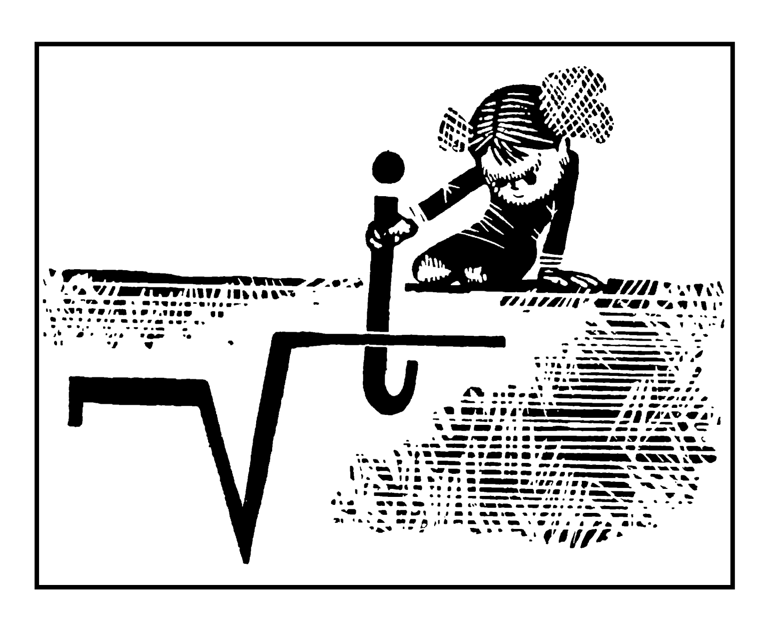
Получив этот результат, мы можем успокоиться и не думать больше, что расчеты наши ведутся ошибочно; да мы и не получили ничего нового. Если

бы мы вместо возведения во вторую степень суммы двух выражений возвели эту сумму в любую степень, используя разложение бинома Ньютона, то «одним махом» получили бы много новых тригонометрических формул.

Я прошу прощения у читателя за эти долгие подсчеты, в продолжение которых пришлось вспоминать сразу столько правил. Мне казалось: чтобы всерьез разобраться в этих вопросах, читателю нужно хотя бы один раз увидеть самому, как элемент i исчезает из расчетов, вдохнув в них новую жизнь.

Однако же не в этом главное значение i.

Совершенно очевидно, что i позволяет разрешить последний неразрешенный случай уравнения второй степени. В конце концов именно для этой цели i и



было введено; благодаря ему мы можем извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Правда, мы приходим к «призрачным» величинам, однако хочется верить, что мы не зря тратили время и име-

ли возможность убедиться, что величинами этими никак не следует пренебрегать. Так, например, для уравнения

$$(x-2)^2=-9$$

мы можем написать решение:

$$x-2=\sqrt{-9},$$

причем $\sqrt{-9}=3i$ или же $\sqrt{-9}=-3i$. Если мы перенесем вычитаемое 2 вправо в качестве слагаемого, то получим два «корня» (решения уравнений также носят такое название, потому что в них часто встречаются знаки корня):

$$x=2+3i,$$

$$x=2-3i.$$

Мы получаем числа, которые складываются из двух частей — действительной и «призрачной», или, как ее называют, мнимой. Такое прихотливое объединение действительного и мнимого миров называется комплексным числом. Хотя написанные выше два комплексных числа кажутся вещами в высшей степени невозможными, сумма их — число действительное, потому что $+3i$ и $-3i$ при сложении взаимно уничтожаются. Более того, можно легко проверить, что произведение этих комплексных чисел также является действительным числом.

Среди комплексных чисел находятся действительные числа, а также числа чисто мнимые. Например, $5+0i=5$ является действительным числом, а $0+2i=2i$ есть число чисто мнимое.

Если мы хотим извлечь из отрицательного числа корень четвертой степени, или же шестой, или же восьмой степени, то нам приходится сталкиваться точно с теми же трудностями, что и при извлечении квадратных корней.

Степень с четным показателем всегда положительное число, независимо от того, положительно или отрицательно основание. Так, например, корень четвертой степени из числа -16 мы не отыщем ни

среди наших положительных, ни среди отрицательных чисел, потому что

$$(+2)^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16,$$

а

$$(-2)^4=\underline{(-2)\cdot(-2)}\cdot\underline{(-2)\cdot(-2)}=(+4)\cdot(+4),$$

что также дает 16. Можно было бы рассудить, что эти корни различных степеней требуют введения новых идеальных элементов. Однако в том-то и дело — и здесь мы сталкиваемся с одним из самых изящных и удивительных математических утверждений, — что этого не нужно делать. Используя элемент i, мы получаем возможность решать любые задачи на извлечение корней.

Основная теорема алгебры

Более того, доказано, что в области комплексных чисел каждое алгебраическое уравнение независимо от степени этого уравнения имеет решение. Этот результат носит название основной теоремы алгебры. Это никоим образом не противоречит теореме Абеля, гласящей, что невозможно отыскать общее решение уравнения пятой степени. Доказательство основной теоремы алгебры является только так называемым «чистым доказательством существования». Доказательство это не дает никаких рецептов, как построить (с помощью четырех арифметических действий и извлечения корня) те числа, которые являются решениями уравнения.

Извлечение квадратного корня всегда дает два значения — одно со знаком «+», другое со знаком «—». Поэтому уравнение второй степени имеет всегда два решения в области комплексных чисел. Впрочем, не всегда. Уравнение

$$(x-3)^2=0$$

имеет только одно решение, потому что число, которое, будучи возведенным в квадрат, дает 0, может быть только равно 0. Поэтому

$$x-3=0,$$

то есть

$$x=3.$$

Это единственное решение нашего уравнения. Однако его можно написать в развернутом виде:

$$x^2+6x+9=0.$$

Это выражение можно приближать с любой степенью точности уравнениями с двумя корнями, такими, что на месте чисел 6 и 9 находятся числа несколько иные, все меньше и меньше от чисел 6 и 9 отличающиеся (например, $0{,}999x^2+5{,}999x+9{,}001=0$). Поскольку эти уравнения будут все более походить на наше уравнение, корни их будут лежать все ближе друг от друга. Поэтому мы можем сказать, что в момент, когда эти уравнения точно совпадут с уравнением

$$x^2—6x+9=0,$$

оба корня окажутся равными друг другу.

Сколько корней имеет уравнение четвертой степени? Уравнение

$$x^4=1$$

можно решить без помощи i. Если $+1$ или же $—1$ мы возведем в четвертую степень, то в обоих случаях получим $+1$. Может показаться, что существуют всего два корня: $+1$ и $—1$. И в этот момент подает голос i: «Стоп! Здесь не все в порядке. Уравнение четвертой степени и должно иметь четыре корня. Без меня здесь не обойтись!»

И в самом деле, i тоже оказывается корнем, более того, корнем оказывается также и $—i$, потому что

$$i^4=\underline{i\cdot i}\cdot\underline{i\cdot i}=i^2\cdot i^2=(—1)\cdot(—1)=+1;$$

$$(—i^4)=\underline{(—i)\cdot(—i)}\cdot\underline{(—i)\cdot(—i)}=i^2\cdot i^2=$$

$$=(—1)\cdot(—1)=+1.$$

Таким образом, i вносит мир и покой в семейство корней каждого уравнения. Можно показать, что

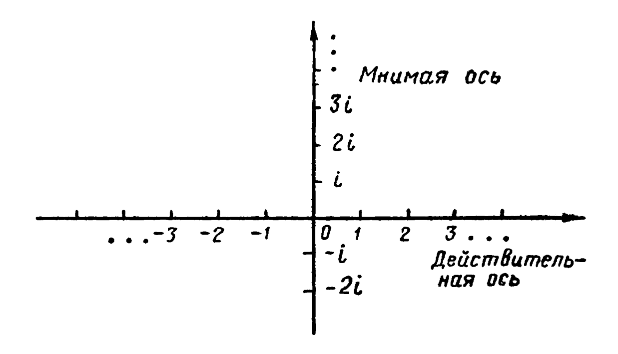
в области комплексных чисел каждое уравнение имеет столько корней, сколько единиц содержит степень уравнения. При этом надо всегда помнить, что некоторые корни могут быть равны между собой.

Таковы услуги, которые наше i оказывает алгебре.

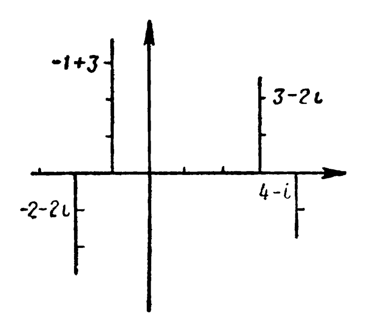
Однако больше всего заслуг оно имеет перед теорией функций.

Чтобы хоть как-то рассказать об этом, придется сначала рассказать о том, как изображаются комплексные числа.

Будем рассматривать i как единицу нового рода, которую мы можем высчитать. Таким образом, мы представим i на новой числовой прямой. Нулевая точка этой числовой прямой может совпасть с нулевой точкой действительной числовой прямой, потому что $0 \cdot i$ равняется 0. Поэтому обе числовые прямые можно расположить так, как располагаются фиксированные оси системы координат:

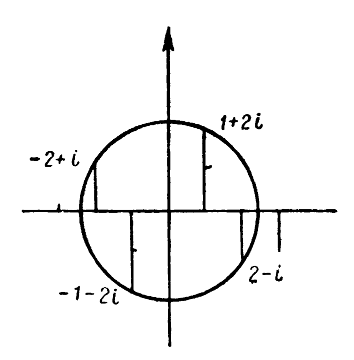


Благодаря этому комплексные числа, складывающиеся из действительной части и из мнимой части, можно представлять в виде точек на плоскости. Абсцисса будет равна действительной части, а ордината — мнимой части. Представление нескольких комплексных чисел будет выглядеть так:



Итак, комплексные числа располагаются не на числовой прямой, а на числовой плоскости.

Под абсолютной величиной комплексного числа понимается его расстояние от нулевой точки. Расстояние это может быть больше или меньше. Существует много комплексных чисел, имеющих одну и ту же абсолютную величину, то есть одинаково удаленных от нулевой точки. Лежат они на окружности с центром в 0:



Нет никаких оснований считать одно из этих чисел меньшим, чем остальные числа. Поэтому в области комплексных чисел нельзя говорить о понятиях «больший» и «меньший».

Несмотря на это, легко можно убедиться в том, что все наши старые правила, касающиеся выполнения действий, остаются справедливыми, если мы

будем обращаться с комплексными числами так же, как и прежде, то есть так, как если бы i было какой-то неизвестной величиной, о которой мы знаем только то, что всюду, где обнаруживается i^2, нужно ставить число —1.

Разложение функций в степенные ряды

Вернемся теперь к одному нашему старому результату. В примере с шоколадками мы получили

$$1\frac{1}{9}=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots .$$

Справа каждое последующее число равно одной десятой предыдущего числа: $\frac{1}{10}$ представляет собой отношение предыдущего и последующего членов, то есть $\frac{1}{10}$ — знаменатель этой геометрической прогрессии. Попробуем преобразовать $1\frac{1}{9}$ таким образом, чтобы число $\frac{1}{10}$ явно участвовало в нашей записи:

$$1=\frac{9}{9},\quad 1\frac{1}{9}=\frac{10}{9}.$$

Нам приходилось уже не один раз производить сокращения, и поэтому мы знаем, что числитель и знаменатель дроби можно делить на одно и то же число. Поделим числитель и знаменатель последней дроби на 10, не обращая внимания на то, что в знаменателе мы можем только обозначить это действие:

$$1\frac{1}{9}=\frac{1}{\frac{9}{10}}.$$

Таким образом, мы приходим к дроби $\frac{9}{10}$, легко выражающейся при помощи $\frac{1}{10}$. В самом деле, целое складывается из 10 десятых; если мы от этого целого отнимем одну десятую, то как раз и останется $\frac{9}{10}$.

Поэтому

$$\frac{9}{10} = 1 - \frac{1}{10},$$

и в конце концов

$$1\frac{1}{9} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}.$$

Если вместо $1\frac{1}{9}$ мы запишем выражение, стоящее в правой части этого равенства, то получим

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots.$$

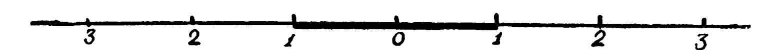
В таком виде наш результат может быть обобщен. Если знаменатель геометрической прогрессии равен, например, не $\frac{1}{10}$, а хотя бы $\frac{2}{3}$, то каждое последующее выражение этой прогрессии будет равно двум третям предыдущего выражения. Выражения этой прогрессии, таким образом, последовательно равны: 1; $1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ и так далее, и в таком случае также можно доказать, что

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots.$$

Не нужно, однако, забывать, что — как мы уже могли убедиться — не все геометрические прогрессии можно просуммировать. Для знаменателей, равных $+1$ и -1, так же как и для знаменателей, имеющих еще большую абсолютную величину, прогрессии эти не являются сходящимися.

Можно, однако, доказать, что прогрессия сходится всякий раз, когда знаменатель ее находится между 0 и 1 — даже в случае, когда знаменатель этот расположен очень и очень близко к единице. Доказывается, что сумма такой сходящейся прогрессии записывается точно так же, как в случае знамена-

лей $\frac{1}{10}$ и $\frac{2}{3}$. Значит, все знаменатели, для которых можно просуммировать прогрессию указанным способом, лежат на числовой прямой между числами —1 и +1:



«Задумаем» теперь какое-то число из тех, что лежат на этом отрезке. Не указывая точно, какое именно это число, назовем его x. Даже и не зная этого числа, можно сказать о нем, что оно образует геометрическую последовательность с выражениями

$$1;\ 1\cdot x=x;\ x\cdot x=x^2;$$
$$x^2\cdot x=x\cdot x\cdot x=x^3;$$
$$x^3\cdot x=x\cdot x\cdot x\cdot x=x^4,\ \ldots$$

и что для этой последовательности выполняется зависимость

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ .$$

Это наверняка будет справедливо для всякого x, при одном только условии — это число x должно находиться в промежутке между —1 и +1.

Значение $\frac{1}{1-x}$ зависит, очевидно, от того, какое число прячется под псевдонимом x; таким образом, значение это является функцией x. В соответствии с принятым нами ранее способом выражаться мы можем сказать, что мы разложили эту функцию в *степенной ряд*, то есть в бесконечный ряд, слагающийся из все более возрастающих степеней x. Частичные суммы этого ряда все более хорошо приближают величину $\frac{1}{1-x}$. В первом, грубом приближении вместо дроби $\frac{1}{1-x}$ можно взять даже число 1; лучшим приближением будет выражение $1+x$; еще лучшим — выражение $1+x+x^2$ и так далее.

Можно поставить также общий вопрос — нельзя ли любую данную функцию разложить в степенной ряд (очевидно, в общем случае нечего ожидать степенного ряда, целиком и полностью похожего на только что рассмотренный нами: мы ищем ряд, состоящий из степеней x, помноженных на какие-то числа). Это чрезвычайно важная проблема теории функций. Функция $\frac{1}{1-x}$ еще довольно простая. Если нам дано число x, то значение этой функции очень просто подсчитывается. Однако мы можем, например, разложить в степенной ряд степень как функцию показателя, причем проще всего делается это в случае, когда основание равно числу $e=2{,}71...$ Для произвольного числа x получается такой ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + ...,$$

где — а мы не должны были этого забывать —

$$2! = 1\cdot 2;\quad 3! = 1\cdot 2\cdot 3;\quad 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$$

и так далее.

Выписанная только что формула приносит громадное облегчение при подсчете значений e, когда на место x мы начинаем подставлять определенные числа. Возведение в степень бесконечной десятичной дроби e — занятие не из приятных. Если, однако, x мал, то вместо этой степени можно — с большим приближением — взять $1+x$, а выполнение этой операции, то есть сложение данного числа с числом 1, относится уже к разряду детских игр.

Если же требуется бо̀льшая точность, то мы берем соответственно большую частичную сумму; в таком случае нужно будет дополнительно просчитать несколько степеней данного числа. Несмотря на это, несравненно более легким занятием является возведение, например, дроби $\frac{3}{10}$ в квадрат, в третью и четвертую степень, нежели извлечение корня десятой степени из иррационального числа $(2{,}71...)^3$, а именно в этом и заключается смысл выражения $(2{,}71...)^{\frac{3}{10}}$.

Хорошо, что это разложение справедливо для значений x.

Логарифмическую функцию и тригонометрические функции также можно разлагать в степенные ряды; в наше время логарифмические и тригонометрические таблицы составляются именно на основе таких разложений.

Однако эти ряды не всегда сходятся при каждом значении x; мы должны постоянно иметь это в виду, чтобы не попытаться заменить какую-либо величину ее приближенными значениями, когда вообще и речи быть не может о каком-либо приближении. Таким образом, возникает вопрос: если нам дана функция, то как мы должны определять те значения x, для которых она разлагается в степенной ряд?

Рассмотрим снова нашу геометрическую прогрессию. Мы выяснили уже, что разложение

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots$$

справедливо на отрезке от —1 до +1:



Видно ли по самой функции $\frac{1}{1-x}$, что именно 1 (а по другую сторону 0, на том же расстоянии, —1) должна быть границей?

Несомненно! Что было бы, если бы x мог принять значение 1?

$$\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}.$$

Уже одна эта запись выглядит устрашающе. Ведь здесь выплывает отныне и вовек запретное деление на 0! Если бы мы ряда и в глаза не видывали, сама функция воскликнула бы: «В точке 1 — стоп!»

Всегда ли функция столь недвусмысленным образом показывает нам, докуда мы имеем право идти?

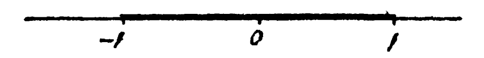
В области действительных чисел это не так. Из-за этого пришлось затратить немало трудов и хлопот, рассматривая отдельные функции. В эту область в нужный момент вторглось i — и исчерпывающе решило эту задачу.

Обратимся к примеру.

Читатель, хоть немного знакомый с формулами, глядя на нашу геометрическую прогрессию, тотчас сообразит, что функция $\frac{1}{1+x^2}$ разлагается в такой степенной ряд:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots,$$

и этот ряд тоже сходится тогда и только тогда, когда x лежит между -1 и $+1$:



Можно ли по виду функции указать эти границы? Ставим на место x число $+1$:

$$\frac{1}{1+1^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$

здесь все в порядке.

Попробуем отыскать ошибку на другом конце; ставим вместо x число -1:

$$\frac{1}{1+(-1)^2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},$$

и тем самым мы убеждаемся, что и здесь нет никакого подвоха.

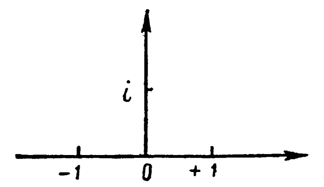
Мы оказываемся в затруднительном положении.

И тогда снова слышится голос i: «Почему вы не подставляете меня на место x?» Подставляем i.

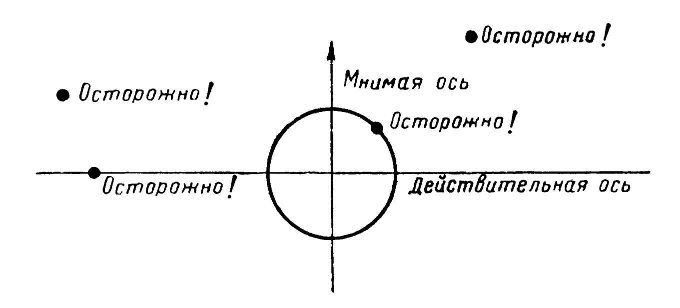
$$\frac{1}{1+i^2}=\frac{1}{1+(-1)}=\frac{1}{0}.$$

Стоп! Это уже деление на 0! Если мы вспомним комплексную числовую плоскость, то сразу же увидим, что расстояние i от нулевой точки также равняется единице. И то обстоятельство, что именно в этой точке функция наталкивается на риф, гово-

рит: мы не имеем права выходить за границы, очерченные единицей:



Итак, приходится исследовать значения функции не только в действительных, но и в комплексных точках. И это всеобщее правило: если существует хотя бы одна точка, в которой функция встречает преграду, то на расстоянии, отстоящем от 0 дальше этой точки, уже не удается разложить функцию в степенной ряд. Поэтому среди неприятных для функции точек комплексной числовой плоскости нужно отыскать ту точку, которая расположена ближе всего от нулевой точки. Безопасная зона, где можно разлагать функцию в степенной ряд, расположена в пределах расстояния этой точки от 0.



Мы получаем круг с центром в нулевой точке. Ряд сходится внутри этого круга и, быть может, в некоторых точках этой окружности, и ни в одной из внешних точек ряд заведомо не сходится. Но такой круг всегда высекает на действительной оси какой-то интервал, содержащий в середине 0; полученный

интервал мы изобразим на рисунке более толстой линией.

И опять появляется i, чтобы установить мир и порядок. Если мы захотим, можно сделать так, что i исчезнет вновь. Мы можем ограничиться тем действительным интервалом, который мы точно отыскали, пользуясь любезной помощью i. Однако увлеченный математик уже не отпустит i. Если i оказывает столь неоценимую помощь, то мы попросту права не имеем смотреть на него как на что-то не существующее. Приходится войти при помощи теории функций комплексного переменного в этот «из ничего сотворенный мир»; и в мире этом царит больший порядок, чем в действительном мире.

16. Секреты ремесла

Едва нам удается справиться с первым впечатлением, которое производит на нас произведение искусства, как нас начинают занимать проблемы несколько иного порядка. Нам хочется узнать, как возникло это произведение, хочется понять скрывающуюся за ним человеческую судьбу, пережить радости и беды повседневного кропотливого труда художника, понять технику мастера. И тогда мы стремимся заглянуть в мастерскую художника.

Вернемся из придуманных нами миров на землю и попытаемся подсмотреть тайны мастерской математика. Как ни стараюсь я щадить читателя, все же нельзя скрыть от него этих кропотливых, канительных исследований.

Тот писатель, который невольно оказался причиной появления этой книжки, больше всего интересовался тем, что такое производная. А именно производная и относится к разряду тайн мастерской, к области математической техники. Хотя она и не представляет собой столь же возвышенного творения, как то, что мы до сих пор рассматривали, однако она имеет огромное значение. Нет великих дел, которые не требовали бы мелочной работы.

Мы с самого начала сказали, что понятие функции представляет собой ядро всей математики и что «портрет» функции дает нам соответствующая кривая. Однако «портрет» этот не точен.

Сначала мы составляли кривую из прямолинейных отрезков; потом старались брать промежуточные точки все более густо, и кривая разглаживалась. Однако при таком разглаживании линии, нарисованные карандашом, начинали сливаться; на нашем рисунке уже трудно различить даже многоугольник с шестнадцатью сторонами и окружность.

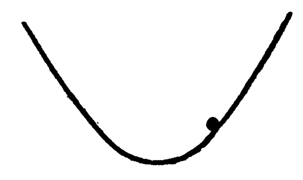
Едва ли можно надеяться, что из такого неточного рисунка можно вывести заключение о тех или иных закономерностях поведения нашей функции. Нужны какие-то точные способы, которые позволили бы обнаружить даже очень малые отклонения и дали бы возможность следить за поведением функции с произвольной точностью. Таким точным устройством и является производная.

Направление касательной

Начнем с рисунка.

Когда я пыталась описать параболу, я сказала, что плечи ее становятся все более крутыми. Что, однако, следует понимать под направлением гладкой кривой?

Мы знаем хорошо, что такое направление прямой линии; ее наклон всегда можно заново измерить в любой точке. Относительно прямой линии мы можем быть уверены: она никогда не отклонится от раз и навсегда выбранного направления. Кривая же линия именно потому и называется кривой, что неустанно меняет свое направление. Схватим мы кривую в одной точке, спросим: «А какое у тебя направление?»



А кривая — гибкая, вот она и выскальзывает из рук, не дает никакого определенного ответа. Несмотря на это, нас не покидает чувство, что в той точке, где нам удалось ухватить кривую, у нее также было определенное направление; ведь не зря же мы говорили о крутизне параболы.

Прокрутим наш фильм обратно — до тех кадров, где кривая еще не стала такой гладкой. Выбираем на этом рисунке какую-то определенную точку кривой:



В отмеченной нами точке находится перелом, и ясно, что кривая не имеет там какого-то определенного направления. Перед этой точкой направление таково:

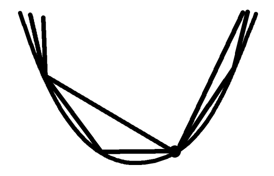


а за этой точкой — таково:

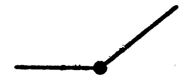


В самой точке линия изменяет свое направление. Прокрутим теперь фильм немного вперед, до того места, где действует уже большее количество промежуточных точек:

* – См. последнюю страницу



Здесь перелом уже куда более плавный:

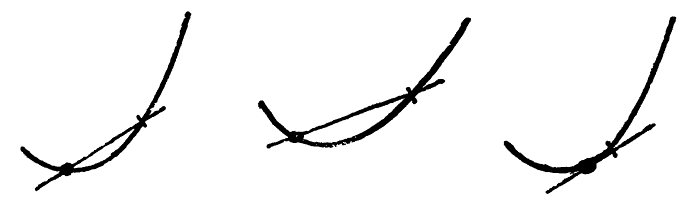


Два направления, встречающиеся в нашей точке, разнятся лишь ненамного.

Пользуясь рисунком, мы уже не сможем следить за тем, что произойдет, когда увеличим число промежуточных точек. Легко, однако, представить себе, что перелом будет все более сглаживаться и направления перед и после точки будут разниться все меньше и меньше.

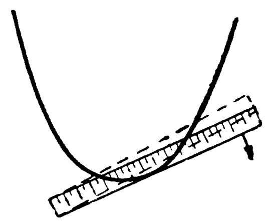
Направлением кривой в этой точке мы и будем считать это общее направление, к которому все более приближаются обе стороны, когда кривая разглаживается.

Если признать, что оба встречающиеся в одной точке отрезка действительно стремятся к одному и тому же направлению, то мы можем остановиться на одном из них и рассматривать только его. Пусть, например, это будет отрезок за точкой. Его направление будет легче легкого отыскать, если мы продолжим его так, чтобы он пересекал кривую:

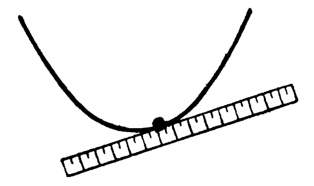


Таким образом, мы последовательно получаем разные секущие кривой.

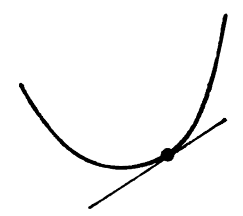
Когда деления будут становиться все более густыми, соседняя точка будет лежать все ближе к нашей точке и все меньшие отрезки секущих будут находиться внутри кривой. Мы сможем хорошо рассмотреть, что при этом происходит, если возьмем в качестве секущей линейку и будем ее поворачивать во внешнюю сторону кривой, непрерывно прижимая одну точку линейки к выбранной нами точке кривой:



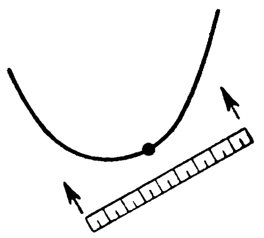
Наступит такой момент, когда соседняя точка попросту совпадет с нашей точкой и линейка «отклонится» от кривой:



Секущая превращается в касательную:



Создается впечатление, что именно в этот момент мы и «ухватываем» направление, к которому стремится верхняя сторона перелома. Если бы мы приближали к кривой линейку, направленную таким образом:



то линейка достигла бы кривой именно в нашей точке, как если бы на минуту прильнула к ней, а поскольку кривая и линейка прилегают друг к другу, то они имеют одинаковое направление. Мы оказываемся в столь счастливом положении, что нам не надо искать это направление на крошечном участке прилегания кривой и прямой, потому что прямая до бесконечности хранит воспоминание о встрече; ее направление остается неизменным.

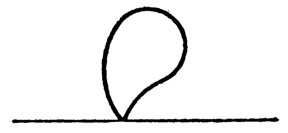
Производная

Теперь мы уже знаем, что следует понимать под направлением гладкой кривой в данной точке: это просто-напросто направление касательной, проведенной через данную точку кривой.

Такое направление можно исчерпывающе охарактеризовать, например, при помощи отношения, которым принято обозначать наклон насыпи. Это отношение, определяющее уклон касательной, и представляет собой п р о и з в о д н у ю.

С понятием касательной мы уже однажды столкнулись, когда, двигаясь по чисто алгебраическому пути, пришли к выводу, что коническая кривая может иметь 0; 1 или 2 общие точки с данной прямой. Мы тогда сказали: если у обеих линий есть только одна общая точка, то прямая касается конической

кривой. Это утверждение относится только к кривым, представляющим собой границы сечений конуса. Факт, что данная прямая имеет только одну общую точку с кривой, не составляет еще определяющего свойства касательной. Если, например, кривая имеет излом:



то нарисованная прямая, проходящая через точку излома, не может считаться касательной, хотя и имеет одну только общую точку с кривой. Ни в коем случае нельзя считать, что направление этой прямой определяет направление кривой в данной точке. В этой точке кривая вообще не имеет однозначного направления; наша прямая не совпадает даже ни с направлением кривой справа от точки излома, ни с направлением кривой слева от точки излома.

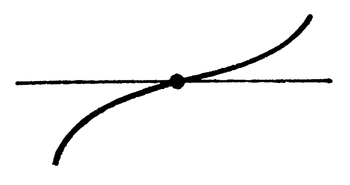
А вот на рисунке



у прямой две общие точки с кривой, и, несмотря на это, в первой точке прямая эта является касательной, потому что она хорошо прилегает к кривой.

Недостаточно будет сказать даже так: касательная только трогает кривую, касается ее, в то время как секущая пересекает кривую.

Например, такая прямая



вероломно пронзает кривую в момент касания. И в то же время прямая безупречно прилегает одновременно как к нижней, так и к верхней части кривой; поэтому у нас нет никаких оснований не признать эту прямую касательной.

Единственным решающим является тот факт, что к данной прямой можно прийти, отталкиваясь от секущих, которые проходят через точки кривой, лежащие все ближе друг к другу. Это выполняется и в двух наших последних примерах — проверьте сами, пользуясь линейкой.

Таким образом, если мы хотим определить направление касательной, то не можем никак избежать кропотливого и мелочного изучения все более сближающихся секущих.

Очевидно, мы не собираемся утверждать, что использование линейки — это точный метод. Если бы нам нужно было точно знать направление кривой — хотя бы для установления какой-то строгой закономерности, мы не могли бы опираться при этом на результаты, полученные при помощи линейки. Точные методы нужно искать, исходя не из рисунка, а из расчетов [1].

Рассмотрим какой-либо пример. Пусть мы хотим выяснить, как ведет себя функция, определенная уравнением

$$y=x^2.$$

Мы уже знаем, что «портретом» ее является парабола. Установим теперь точно, каково направление касательной к параболе, в точке с абсциссой, равной 1.

В этой точке ордината равна

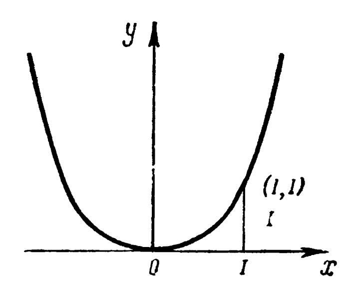
$$y=1^2=1;$$

поэтому наша парабола проходит через точку (1 ; 1). Ищем направление касательной в точке (1 ; 1).

---

[1] Если кому-то из читателей неинтересны производные и интегралы, если кропотливая работа оказалась утомительной — тому я в виде исключения разрешаю опустить при чтении всю оставшуюся часть этого раздела и весь следующий раздел.

Как выглядит наша кривая, мы уже хорошо знаем:



Мы знаем, что теперь нужно делать. Сначала мы должны рядом с точкой (1 ; 1) выбрать соседние точки, расположенные все более близко друг от друга. Затем через точку (1 ; 1) и через каждую из этих соседних точек проводим секущие и устанавливаем, каковы направления этих секущих. Они определяются отношениями, похожими на те, которыми выражается наклон железнодорожной насыпи. Наконец, мы смотрим, к чему приближаются эти направления тогда, когда секущие приближаются к касательной.

Соседние точки мы будем выбирать так, чтобы сначала мы сдвинулись от точки (1; 1) на одну единицу вправо, затем на одну десятую единицы вправо, затем на одну сотую единицы вправо, на одну тысячную единицы вправо и так далее. Абсциссы соседних точек будут соответственно равны:

$$1+1=2;\ 1{,}1;\ 1{,}01;\ 1{,}001;\ \ldots .$$

Нужно отыскать также и ординаты этих точек. Согласно уравнению $y=x^2$ сделать это можно путем возведения в квадрат, что не составляет никакого труда, потому что 2^2 равняется 4, а из второй строчки треугольника Паскаля (если мы не будем обращать внимания на запятую и дополнительно появляющиеся нули, впрочем, с такими степенями мы уже имели дело раньше) получаем, что

$$1{,}1^2=1{,}21;\ 1{,}01^2=1{,}0201;\ 1{,}001^2=1{,}002001;\ \ldots$$

Сейчас рассмотрим еще некоторые моменты, чтобы не задерживаться на мелочах при рассмотрении более важных вопросов. Мы не один раз уже сокращали дроби и знаем, что числитель и знаменатель дроби можно поделить на одно и то же число. Если, например, после сокращения на 2 получаем

$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4},$$

то можно записать, что и обратно имеет место равенство

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}.$$

Следовательно, числитель и знаменатель можно также помножать на одно и то же число. Вид дроби после этого, вообще говоря, будет более сложным, однако указанное правило можно использовать с большим успехом тогда, например, когда мы сталкиваемся с таким неприятным делением:

$$\frac{0,21}{0,1}.$$

Мы уже знаем, что десятичную дробь можно умножать на 10, передвигая запятую на один порядок вправо. Так поступим и с нашим выражением. Тогда

$$\frac{0,21}{0,1}=\frac{2,1}{1}=2,1.$$

Точно так же, умножая в дроби

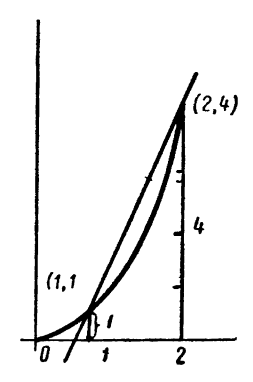
$$\frac{0,0201}{0,01}$$

числитель и знаменатель на 100, мы получаем

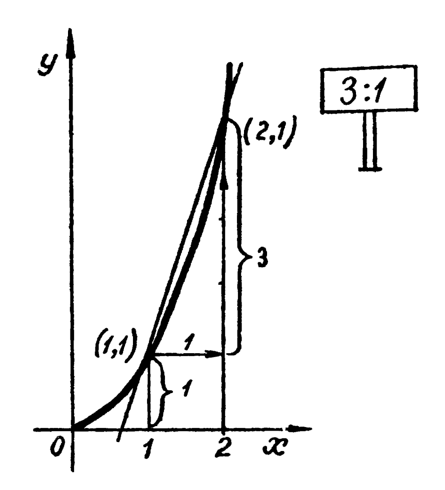
$$\frac{0,0201}{0,01}=\frac{2,01}{1}=2,01.$$

Теперь можно приступить к нашей задаче. Абсцисса точки, на которую мы смотрим как на первую соседнюю точку, равна 2; ордината же равна $2^2=4$.

Через эту точку (2; 4) и через исходную точку (1; 1) проводим первую секущую:



Установим прежде всего направление этой секущей. Из точки (1 ; 1) продвигаемся на одну единицу вправо — такова разница абсцисс — и на три единицы вверх: настолько ордината второй точки превышает ординату нашей исходной точки (то есть такова разность двух ординат). Это еще более отчетливо видно на новом рисунке:



Тогда наклон первой секущей равняется

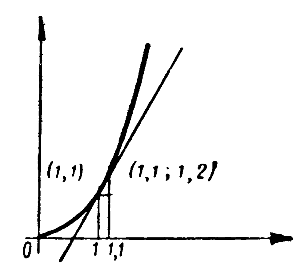
$$3:1,$$

то есть

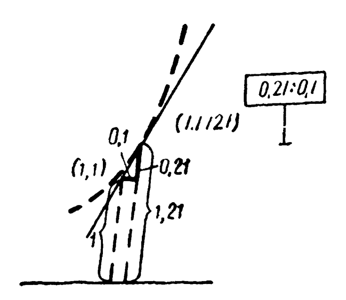
$$\frac{3}{1}=3=2+1$$

(есть основания записать это именно в таком виде).

Обратимся теперь к следующей соседней точке, для которой $x=1{,}1$ и — как мы уже подсчитали раньше — $y=1{,}1^2=1{,}21$; то есть мы имеем дело с точкой (1,1 ; 1,21). Если теперь провести через эту точку и исходную секущую и обозначить ее наклон жирной линией, то маленькие отрезки начинают уже почти сливаться:



Рассмотрим соответствующую часть рисунка при помощи лупы:



На сколько мы передвинулись вправо? На отрезок 0,1; такова величина разности абсцисс.

На сколько ордината второй точки возвышается над ординатой нашей точки? На столько, сколько составляет разница между обеими ординатами, то есть на

$$1{,}21-1=0{,}21.$$

Наклон второй секущей равен

$$0{,}21:0{,}1,$$

или

$$\frac{0{,}21}{0{,}1}.$$

Вспомним, что деление это дает результат

$$2{,}1=2+\frac{1}{10}.$$

Перейдем к следующей соседней точке, в которой $x=1{,}01$ и — согласно уже полученному нами результату — $y=1{,}01^2=1{,}0201$. Здесь нам понадобится лупа, дающая куда более сильное увеличение. Однако именно здесь уже можно не пользоваться рисунком, потому что из проведенных нами наблюдений отчетливо видно, что разность ординат всегда делится на разность абсцисс. Для рассматриваемой точки и точки (1:1) разность ординат равна

$$1{,}0201-1=0{,}0201,$$

а разность абсцисс равняется

$$1{,}01-1=0{,}01.$$

Поэтому наклон третьей секущей равен

$$0{,}0201:0{,}1,$$

то есть

$$\frac{0{,}0201}{0{,}01}.$$

Значение этой дроби равняется

$$2{,}01=2+\frac{1}{100}.$$

Идя таким путем все дальше и дальше, обнаружим, что отношения разностей ординат к разностям абс-

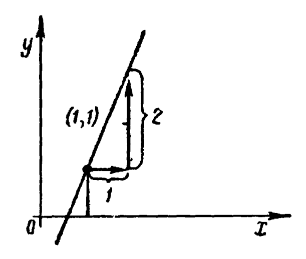
цисс (разностные отношения), определяющие наклон секущей, равны последовательно

$$2+1;\quad 2+\frac{1}{10};\quad 2+\frac{1}{100};\quad 2+\frac{1}{1000};\ \ldots\ .$$

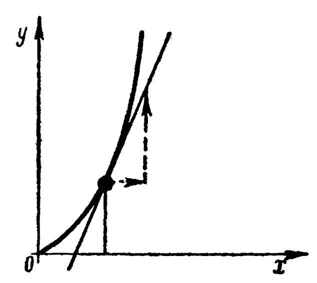
Мы видели, что последовательность

$$1;\quad \frac{1}{10};\quad \frac{1}{100};\quad \frac{1}{1000};\ \ldots$$

стремится к нулю — вспомним наш пример с шоколадками. Поэтому число 2 является в точности тем значением, к которому все более приближаются члены нашей последовательности. Они показывают, что секущие приближаются к касательной. Поэтому наклон касательной к параболе в точке (1 ; 1) равен 2, то есть $\frac{2}{1}$. Зная этот наклон, можно нарисовать касательную:



Если мы рядом, исходя из большого количества промежуточных значений, начертим параболу, то убедимся, что в самом деле эта прямая касается параболы:



Заметим, что, хотя наши рисунки и не были точными, мы тем не менее отыскали абсолютно точный счетный метод определения касательной. Оказывается, нужно взять на кривой по соседству с нашей точкой другую точку, поделить разность их ординат на разность абсцисс и посмотреть, к какому значению стремится полученное разностное отношение, когда соседняя точка передвигается все ближе к нашей точке.

Это значение, к которому стремятся разностные отношения, мы называем производной (чтобы подчеркнуть ее тесную связь с разностными отношениями, мы могли бы по примеру некоторых иностранных языков назвать ее дифференциальным отношением). Производная дает нам, как об этом уже и говорилось раньше, численный метод отыскания касательной к гладкой кривой; благодаря этому ею можно пользоваться при изучении поведения кривой вообще.

Во всех остальных точках можно точно так же использовать этот метод. Если кривая гладкая, то в каждой точке у нее должно быть определенное направление касательной. В точке (2; 4), лежащей выше точки (1; 1), парабола оказывается более крутой. Если мы подсчитаем разностные отношения, соответствующие точкам, лежащим все более близко к точке (2; 4) и имеющим абсциссы

$$x=2+1;\quad 2{,}1;\quad 2{,}01;\quad 2{,}001;\quad \ldots.$$

то получаем последовательно значения

$$4+1;\qquad 4+\frac{1}{10};\qquad 4+\frac{1}{100};\qquad 4+\frac{1}{1000};\quad \ldots\ .$$

Следовательно, число 4 есть именно то число, к которому с каждым разом все лучше приближаются выписанные нами величины. Поэтому наклон касательной в точке (2; 4) равняется $4=\frac{4}{1}$, а это больше, чем наклон $\left(2=\frac{2}{1}\right)$ касательной в точке (1; 1).

Так же точно можно показать, что в точке параболы с абсциссой $x=3$ наклон касательной равняется 6, а в точке с абсциссой, равной 4, наклон каса-

тельной равен 8. Вообще во всех точках параболы наклон в два раза больше величины абсциссы рассматриваемой точки. Это можно выразить следующим образом: производная функции

$$y = x^2$$

для любого значения x равняется

$$2x.$$

И у нас в руках оказывается действительно весь «ход» параболы.

Чтобы получить определенную исходную точку, «прочтем» по нашему уравнению функции еще только одно — то, что парабола проходит через нулевую точку. В самом деле, если $x=0$, то $y=x^2=0^2=0$. Обо всем остальном нам уже расскажет производная.

Если, например, x является каким-то отрицательным числом, то удвоенное значение x, то есть $2x$, тоже отрицательное число. В такой точке касательная должна быть нисходящей, значит, нисходящей должна быть также и сама кривая, которая прилегает к касательной.

Если же число x положительное, то его удвоенное значение также будет положительным; в такой точке кривая поднимается.

Если $x=0$, то удвоенное значение $2x$ также равно 0. Поэтому в нулевой точке кривая имеет касательную с нулевым наклоном; скат с наклоном, равным 0, — это горизонталь, так что мы имеем дело всего лишь с горизонтальной прямой, в нашем случае — осью x.

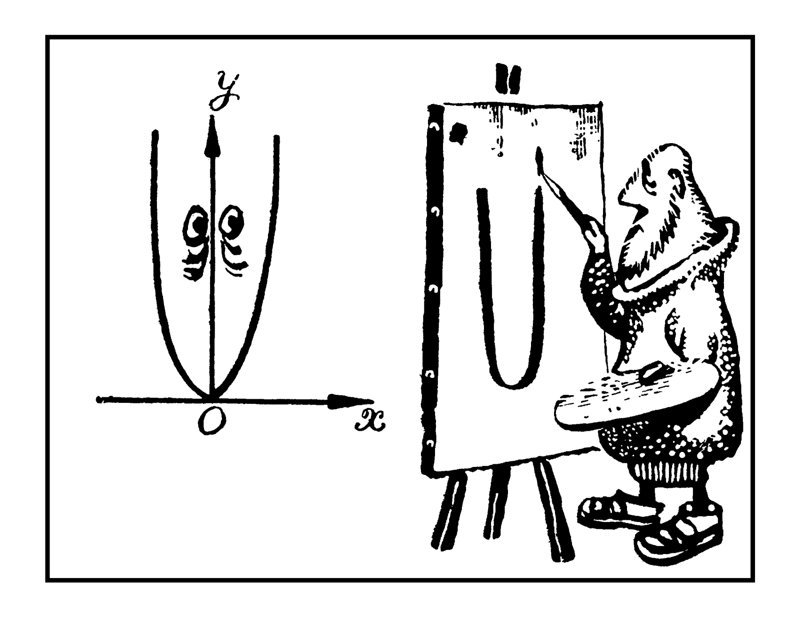
Если абсолютное значение x возрастает, то удвоенное значение будет также возрастать все больше и больше, поэтому будет увеличиваться и крутизна касательной.

Отсюда можно сделать следующий вывод о «внешности» кривой. Слева от нулевой точки кривая падает; в нулевой точке она становится на миг горизонтальной и прилипает к оси x; а справа от нулевой точки подымается вверх, возрастая. Поэтому самой нижней точкой кривой является нулевая точка, и по

мере удаления от этой точки оба плеча кривой становятся все более крутыми.

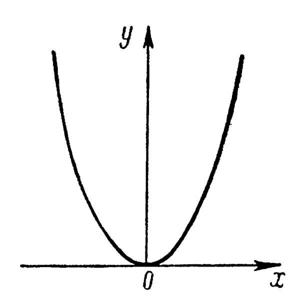
Все это мы уже знали, ибо раньше уже интересовались характером и манерой поведения параболы: однако в случае функции, менее известной своими качествами, производная дала бы нам необходимую информацию.

Наши сведения о параболе также увеличились благодаря знакомству с производной. Уже рисуя «температурные кривые», мы убедились в том, что «портретом» функции $2x$ является прямая линия (в чем нет

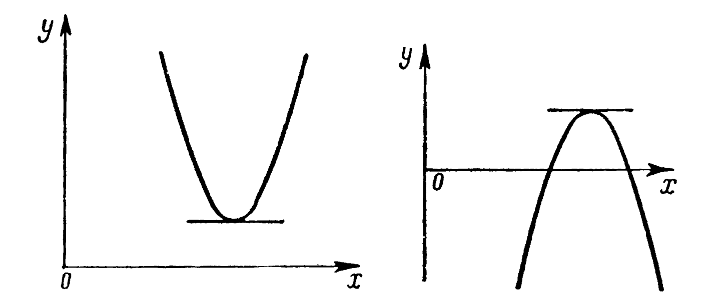


ничего удивительного, потому что мы имеем дело с функцией первой степени). Отметим также, что функция эта растет равномерно. Отсюда следует, что хотя крутизна и увеличивается постоянно по обе стороны от нулевой точки, однако происходит это не резко, а плавно, в постоянном темпе.

Очевидно, парабола может оказываться в положении, отличающемся от привычного:



Например, парабола может быть расположена так:

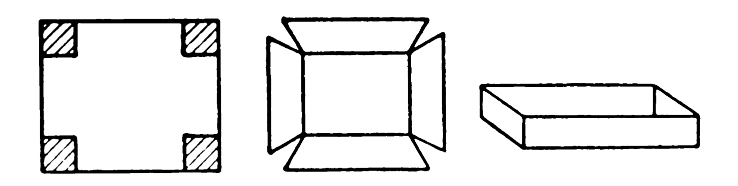


И в таких случаях мог бы оказаться весьма спорным вопрос: где лежит самая низкая или самая высокая точка параболы? Производная же определяет эту точку тотчас, потому что касательная к параболе в этой точке должна быть горизонтальной.

Отыскание таких низших или высших точек (на языке теории функций — определение максимумов и минимумов функции) открывает возможности для большого числа разнообразных исследований.

Допустим, из квадратного листа мы делаем коробочку, вырезая по углам листа маленькие квадратики

и загибая кверху выдающиеся части полученной таким образом фигуры:



Попробуем выяснить, какими должны быть вырезанные нами маленькие квадратики для того, чтобы получить наибольший объем коробки.

Мы не знаем величину стороны маленького квадрата и поэтому обозначим ее через x. Очень легко установить, каким образом объем коробочки зависит от выбора x. Одно ясно: когда x мал, то есть когда мы вырезаем маленькие квадратики, получается длинная и широкая коробочка с низкими бортами; когда же вырезаем большие квадратики, то есть когда уменьшаем дно, коробочка становится выше. Поэтому x не должен быть ни слишком большим, ни слишком маленьким; нужное нам значение следует искать где-то посредине, избегая крайностей. Производная «на ощупь» позволяет абсолютно точно установить, что мы получим коробочку, имеющую наибольший объем, тогда, когда сторона маленького квадрата будет равна одной шестой стороны большого квадрата.

Бросим шарик; однако прежде чем это сделать, попробуем узнать заранее, куда он упадет. Именно производная и даст нам ответ на этот вопрос, едва только мы всерьез им займемся.

Существует еще множество разнообразных задач такого рода.

Займемся примером, в котором кривая функции известна нам хуже параболы. Как и раньше, с помощью разностных отношений можно установить, что в каждой точке графика, определенного уравнением

$$y = x^3,$$

наклон касательной равен утроенному квадрату абсциссы данной точки, то есть производная этой функции равна

$$3x^2.$$

Какие выводы можно из этого сделать?

Чтобы отыскать исходную точку, заметим, что из самой функции следует, что

$$\text{если } x=0, \text{ то и } y=0^3=0.$$

Поэтому наша кривая также проходит через нулевую точку.

Предоставим теперь голос производной.

Мы видим, что в нее входит квадрат x (то есть «портретом» производной является парабола). Отсюда можно тотчас же сделать два заключения.

Во-первых, в случае $y=x^3$ мы имеем дело с равномерным ростом наклона; по мере того как кривая удаляется от нулевой точки, ее наклон возрастает все более бурно.

Другой вывод таков: независимо от того, с положительной или отрицательной абсциссой мы имеем дело, x^2 всегда положительный; поэтому кривая возрастает как справа, так и слева от нулевой точки.

Проходит кривая через нулевую точку. Начинается она снизу слева от этой точки и может возрастать лишь тогда, когда значения функции расположены ниже нуля, иначе говоря, если кривая проходит под осью x.

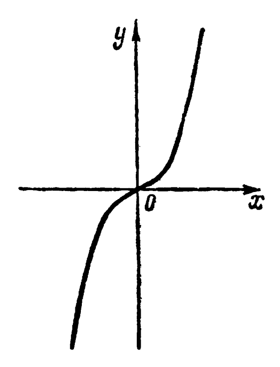
Справа от нулевой точки кривая возвышается над осью x. Значит, она пересекает ее в нулевой точке. В то же время если

$$x=0, \text{ то } 3x^2=3\cdot 0^2=0.$$

Другими словами, наклон касательной в нулевой точке равен нулю — касательная горизонтальна. А горизонтальная линия, проходящая через нулевую точку, — это всего-навсего ось x. Следовательно, ось x прилегает к нашей кривой в той точке, в которой они пересекаются, то есть в нулевой точке. Когда кривая приближается к этой точке, ее наклон становится все более плавным; на миг задерживается на отдых, на-

бравши сил, снова принимается возрастать, сначала медленно, а затем все смелей и смелей.

Итак, перед нами вырисовывается примерно такой облик линии:



А теперь построим график той функции, о которой говорилось: $y=x^3$.

Если $x=0$, то $y=0^3=0$;
если $x=1$, то $y=1^3=1$;
если $x=2$, то $y=2^3=8$;
если $x=-1$, то $y=(-1)^3=-1$;
если $x=-2$, то $y=(-2)^3=-8$.

Подсчитаем еще некоторые промежуточные значения функции:

если $x=\frac{1}{2}$, то $y=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$;

если $x=\frac{-1}{2}$, то $y=\left(\frac{-1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot$
$\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$;

если $x=\frac{1}{4}$, то $y=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$.

Точку $\frac{1}{64}$ уже почти невозможно отложить карандашом, которым мы собираемся чертить наш график.

На рисунке в этой точке кривая почти сливается с осью x (более подробное исследование производной подтверждает это чрезвычайно плотное «прилегание» кривой к оси x). Поэтому в точках

$$0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2$$

мы откладываем соответственно

$$0;\ \frac{1}{8},\ 1;\ 8$$

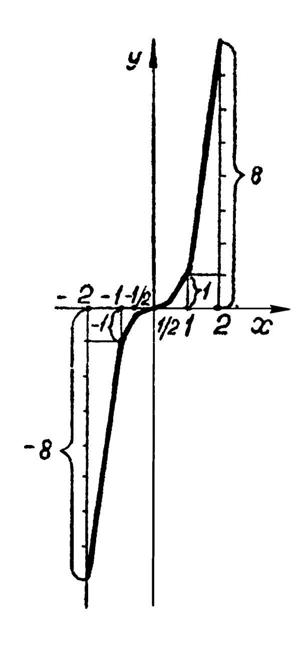
единиц вверх, а в точках

$$-\frac{1}{2},\ -1;\ -2$$

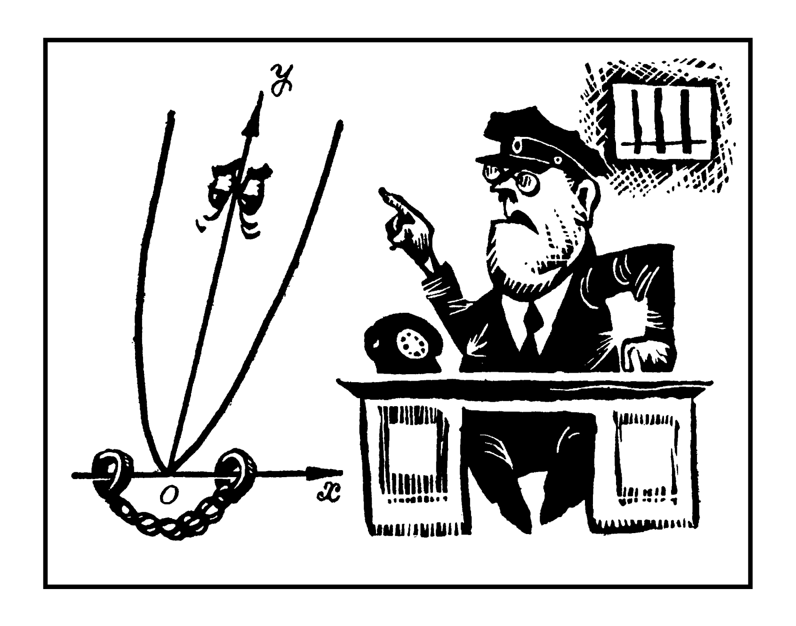
откладываем

$$-\frac{1}{8};\ -1;\ -8$$

единиц вниз:



Это на самом деле тот портрет, который описала нам ранее производная. В промежуточных точках кривая не может допустить никакого отклонения, иначе производная тотчас бы сообщила нам об этом. Производная не только набрасывает нам основные штрихи портрета, но также дает с абсолютной точностью направление кривой в каждой точке.



Нет ничего удивительного в том, что математик, столкнувшись с какой-либо функцией, тотчас же отыскивает ее производную и допрашивает ее до тех пор, пока она не выдаст ему все тайны функции.

И когда физик обращается в богатый математический арсенал за какой-либо функцией, математик тотчас же выдает ему вместе с функцией также и ее производную — точную инструкцию пользования ею.

17. С миру по нитке— голому рубаха

Определенный и неопределенный интегралы

В жизни нам так часто приходится умножать, что мы наизусть знаем таблицу умножения. Благодаря этому нам нетрудно указать результаты обратных действий — например, что 5 является тем самым числом, которое, будучи помножено на 4, дает 20.

Можно «узнавать» так же производные, если они появляются перед нашими глазами. Пусть мы увидим функцию $2x$; нам тотчас приходит в голову мысль: а ведь мы откуда-то эту функцию знаем! Однако откуда? Ах да, ведь это была производная функции $y=x^2$! Здесь можно говорить об обращении операции: когда дана некоторая функция, то можно поставить вопрос, не существует ли какой-либо другой функции, производная которой совпадает с данной функцией, и если существует, то как ее отыскать. Такая функция называется интегралом данной функции. Например, интегралом от $2x$ является функция $y=x^2$.

Как и при решении уравнений, существуют приемы, которые облегчают нахождение искомой функции, если мы не в состоянии распознать эту функцию сразу. Пусть, например, данной функцией будет x^2. Она очень похожа на $3x^2$, которая, это мы уже совершенно точно знаем, является производной функции $y=x^3$. Наше x^2 для каждого значения x равно одной трети $3x^2$. Поэтому x^2 наверняка будет производной одной трети x^3, то есть производной функции

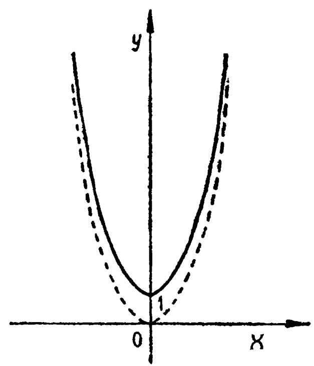
$$y=\frac{x^3}{3}.$$

Легко доказать, что это предположение соответствует истине.

Однако такие приемы в большинстве случаев оказываются недостаточными. Нужны более общие методы. И кроме того, только что описанный нами спо-

соб «отгадывания» обладает еще одним недостатком. По производной нельзя, например, догадаться, что график функции $y=x^2$ проходит через нулевую точку; в свое время нам пришлось обращаться к самой функции для того, чтобы узнать это. Следует ли из этого, что производной недостаточно для того, чтобы полностью восстановить облик кривой?

В том-то и дело, что следует. Мы можем в этом убедиться, передвинув нашу параболу на одну единицу вверх:



Ясно, что при обычном передвижении форма кривой не изменится; ее крутизна остается в каждой точке такой же, какой и была. Уравнение же кривой изменилось, потому что ордината каждой точки увеличилась на единицу. Поэтому значение y, до сих пор равнявшееся x^2, поднялось до величины x^2+1. Уравнение передвинутой параболы, таким образом, имеет вид

$$y=x^2+1.$$

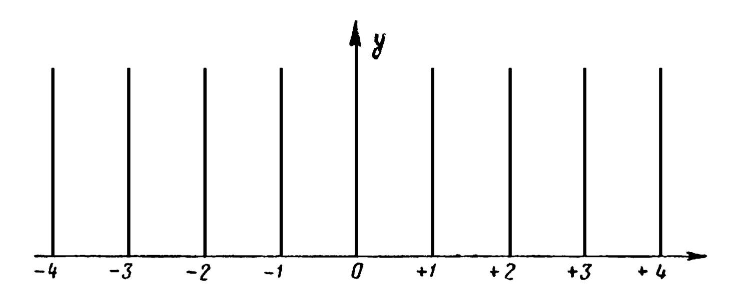
Зная только мгновенное направление кривой, то есть зная одну только производную, мы не можем еще ответить на вопрос, идет ли речь об этой функции, или о той, с которой мы имели дело раньше, или об одной из бесчисленного множества функций, которые мы можем получить, двигая нашу параболу вверх либо вниз. С этой точки зрения задача наша является неопределенной.

Если, однако, нам будет дана хотя бы одна точка на искомой кривой, то задача станет уже определенной. Пусть начальным значением будет утверждение, что кривая проходит через нулевую точку. Тогда при производной, равной $2x$, речь может идти только о нашей первоначальной параболе. Мы убедимся в этом очень скоро.

Рассмотрим на примере параболы общий метод. Допустим, что нам не известен интеграл функции $2x$. Ищем кривую, о которой можно сказать только то, что она проходит через нулевую точку и что наклон касательной в каждой ее точке равен $2x$.

Будем исходить также из рисунка, хотя нашей целью и является отыскание точного счетного метода.

Поделим сначала ось x на интервалы (причем длина каждого интервала пусть равняется одной единице) и проведем через точки деления вертикальные прямые, предназначенные для не известных еще нам ординат:



Мы знаем, что в точке $x=0$ кривой y также равняется 0. С этого места и примемся рисовать кривую — конечно, она будет только приближенно напоминать истинный образ нашей функции.

Исходим из того, что на миг кривая сливается с касательной и в небольшом отдалении от точки касания касательная с успехом может заменять кривую. В качестве такого малого расстояния примем сейчас расстояние между двумя вертикальными прямыми. Тогда нарисуем сначала ту касательную, которая со-

ответствует нулевой точке, и предположим, что эта касательная изображает нашу кривую вправо вплоть до вертикальной линии, проходящей через точку $+1$, и влево вплоть до вертикальной линии, проходящей через точку -1.

Обе точки, в которые мы попадаем таким путем, рассматриваем как те точки нашей искомой кривой, которые соответствуют значениям $x=+1$ и $x=-1$. Затем рисуем в этих точках соответствующие касательные и продолжаем их до следующих вертикальных линий. Полученные точки рассматриваем как те точки кривой, которые соответствуют значениям $x=+2$ и $x=-2$.

Снова рисуем касательные, соответствующие этим значениям, и продолжаем их вплоть до пересечения со следующими вертикальными прямыми, и так далее. Очевидно, касательные мы рисуем, всегда исходя из данного наклона. В точке $x=0$ наклон равен

$$2x=2\cdot 0=0;$$

в точке же $x=1$ наклон равняется

$$2x=2\cdot 1=2.$$

Мы знаем, что функция $2x$ равномерно возрастает. Поэтому в следующих точках, лежащих на вертикальных прямых, наклон будет с каждым разом увеличиваться вдвое, то есть начиная от $x=1$ будет последовательно принимать значения 2; 4; 6; 8; ... . Аналогичным образом можно выяснить, что слева от нуля наклон будет равен —2; —4; —6; ... . Поэтому в точках

$$0;\ 1;\ 2;\ -1;\ -2$$

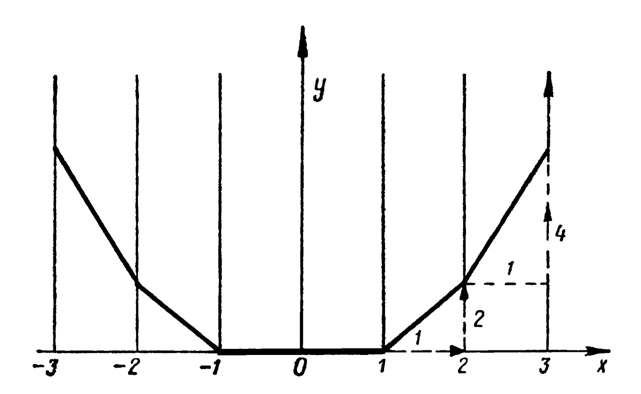
наклон будет соответственно равен

$$0;\ 2;\ 4;\ -2;\ -4.$$

Мы уже хорошо знаем, что при наклоне 2, то есть $\frac{2}{1}$, нужно отойти на одну единицу вправо и подняться на две единицы вверх. Точно так же наклон —2 означает, что нужно пройти одну единицу влево

и подняться на две единицы вверх. Таким образом, от точек +1 и —1 нужно отмерить вверх одинаковые отрезки. Отсюда следует, что наш рисунок будет симметричным. Поэтому достаточно точно определить, как выглядит правая половина рисунка, а левую тогда мы сможем дорисовать без труда.

Теперь мы можем приступить к самому рисунку. Наклон 0 в нулевой точке означает, что путь наш горизонтален. По этой горизонтали мы приходим в точку 1. Отсюда двигаемся до следующей вертикальной линии с наклоном $2 = \frac{2}{1}$, а от этого места нас поведет дальше дорога с наклоном $4 = \frac{4}{1}$:



Так получается эскиз к портрету параболы, который далеко еще не похож на оригинал.

Подсчитаем теперь, какова точность нашего результата. Ограничимся только точкой $x=3$. Посмотрим, какова ордината кривой $y=x^2$ в этой точке:

$$\text{если } x=3, \text{ то } y=3^2=9.$$

Очевидно, мы еще не пришли к выводу, что речь идет о функции $y=x^2$. Однако поскольку «тайно» нам об этом известно, можно этим воспользоваться для выяснения точности нашего рисунка. Посмотрим, чему равна разница между ординатой нашей лома-

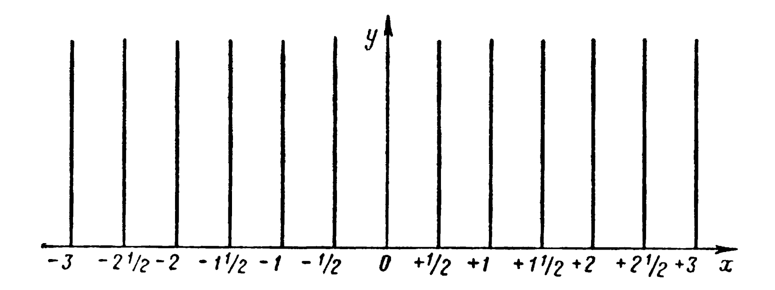
ной линии, соответствующая абсциссе $x=3$, и величиной 9.

Рисунок показывает, что ордината эта складывается из высот всех наклонов, начиная от нулевой точки, то есть

$$y=0+2+4=6=9-3.$$

Три единицы разницы — это не так уж мало!

Сгустим теперь точки деления оси абсцисс, проводя вертикальные линии на расстояниях, равных $\frac{1}{2}$ единицы:



Наклон касательной в нулевой точке снова равен нулю (касательная горизонтальна).

В точке же $x=\frac{1}{2}$ мы имеем

$$2x=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

И на равных расстояниях наклон увеличивается равномерно, то есть в каждой из последующих точек наклон увеличивается на 1.

Поэтому в точках

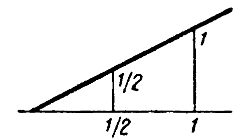
$0; \frac{1}{2}; \; 1; \; 1\frac{1}{2}; \; 2; \; 2\frac{1}{2}; \; -\frac{1}{2}; \; -1; \; -1\frac{1}{2}; \; -2; \; -2\frac{1}{2}$

наклон касательной соответственно равен

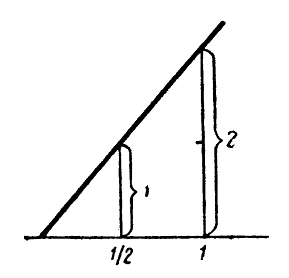
$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ -1;\ -2;\ -3;\ -4;\ -5.$$

Прежде чем переходить к рисунку, мы должны обратить внимание вот на какую деталь. В точке 0 наклон равен 0; отсюда мы должны перейти по го-

ризонтали в точку $\frac{1}{2}$. Здесь все в порядке. Однако на отрезке $\frac{1}{2}$ наклон равен 1, то есть $\frac{1}{1}$, и поэтому следовало бы передвинуться на одну единицу вправо и одну единицу вверх. Но ведь не для того же мы рисовали вертикальные прямые, отстоящие друг от друга на расстояние $\frac{1}{2}$ единицы, чтобы снова передвигаться на целую единицу вправо! Однако едва мы немного задумаемся над этим, все легко разрешается: если уклон железнодорожной насыпи равен $\frac{1}{1}$, то есть если насыпь увеличивается на 1 метр тогда, когда мы проходим вдоль нее 1 метр по горизонтали, то при прохождении только $\frac{1}{2}$ метра уклон насыпи увеличится также на $\frac{1}{2}$ метра:



То же можно сказать и о случае, когда уклон насыпи равняется $2 = \frac{2}{1}$. Пройдя по горизонтали не метр, а полметра, мы обнаружим, что высота насыпи увеличилась не на два, а на один метр:



Значит, если мы будем передвигаться шагами, равными $\frac{1}{2}$ единицы, то с каждым разом будем продвигаться вверх на отрезок, равный половине расчетного наклона. Иначе говоря, выходя из точек

$$0;\ \frac{1}{2};\qquad 1;\qquad 1\frac{1}{2};\quad 2;\qquad 2\frac{1}{2},$$

мы должны подняться вверх соответственно не на

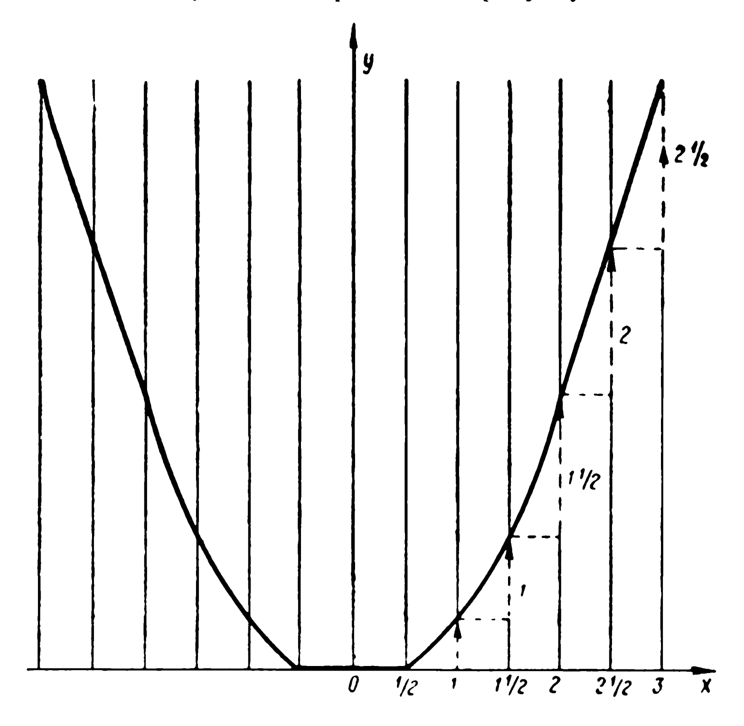
$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5,$$

а на

$$0;\ \frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\cdot 2=1;\ \frac{1}{2}\cdot 3=1\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\cdot 4=2;$$

$$\frac{1}{2}\cdot 5=2\frac{1}{2}.$$

Уяснив это, можно обратиться к рисунку:



Линия эта очень похожа на параболу, только еще слишком усердно прилегает к оси x.

Подсчитаем снова значение ординаты, соответствующей точке $x=3$.

Эта ордината складывается не из наклонов, заключенных между точками 0—1; 1—2; 2—3, а из значений, наполовину меньших. Будет лучше, если мы запишем не в «завершенном» виде:

$$0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ 1\frac{1}{2};\ 2;\ 2\frac{1}{2},$$

а в форме

$$\frac{1}{2}\cdot 0;\ \frac{1}{2}\cdot 1;\ \frac{1}{2}\cdot 2;\ \frac{1}{2}\cdot 3;\ \frac{1}{2}\cdot 4;\ \frac{1}{2}\cdot 5.$$

Тогда получим

$$y=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5.$$

Слагаемое $\frac{1}{2}\cdot 0$ равно 0, поэтому можно не принимать его во внимание.

Мы должны взять половину каждого выражения, но проще сначала эти выражения сложить, а потом поделить результат пополам:

$$y=(1+2+3+4+5)\cdot\frac{1}{2}.$$

И это сложение можно упростить, пользуясь методом, открытым моей ученицей Верой. Вместо того чтобы подсчитывать сумму пяти первых натуральных чисел, достаточно пять раз повторить их «серединку», то есть число 3. В результате получаем число 15. Теперь ищем половину этого числа — получаем величину $\frac{15}{2}$. Если к 15 прибавить еще 3, то получим 18, то есть удвоенное значение числа 9. Поэтому в конечном счете

$$y=\frac{15}{2}=\frac{18}{2}-\frac{3}{2}=9-\frac{3}{2}.$$

Соответствующая ордината ранее рассмотренной нами кривой разнилась от 9 на 3, а теперь ордината отличается от «эталона» только на $\frac{3}{2}$.

Изучая наши кривые, состоящие из «суставов», — а изучение это, из-за неточности рисунка, может дать только очень неточный результат, — мы походя получили метод подсчета ординаты в точке $x=3$. Этот метод можно неограниченно улучшать. Ясно, что, продолжая деление оси x на еще более мелкие отрезки, мы будем получать все более близкие к расчетной кривые. Следующим шагом будет $\frac{1}{4}$ единицы. И опять в нулевой точке наклон снова равен 0, в точке же $\frac{1}{4}$ окажется

$$2x=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, на одинаковых расстояниях наклон будет всегда увеличиваться на $\frac{1}{2}$. Поэтому в отдельных точках, начиная с нулевой, наклоны касательной будут иметь значения, приведенные в таблице.

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{11}{2}$

Поскольку мы хотим с каждым разом передвигаться на $\frac{1}{4}$ единицы влево, нам придется каждый раз откладывать вверх четвертую часть данной величины наклона. Ведь если мы по насыпи пройдем $\frac{1}{4}$ горизонтального пути, то вверх насыпь подымется всего лишь на $\frac{1}{4}$ той высоты, которую мы получили бы, пройдя всю дорогу целиком. Из этих четвертей складывается y в точке $x=3$:

$$y=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{2}.$$

Слагаемое $\frac{1}{4}\cdot 0$, очевидно, равняется 0, и поэтому на него можно не обращать внимания.

Каждое выражение умножается здесь на $\frac{1}{4}$, то есть его нужно попросту поделить на 4, а знаменатель каждого выражения показывает также, что нужно еще произвести деление пополам. Мы уже знаем, что если какую-то величину поделить на 4 и затем еще на 2, то получается тот же результат, что и при делении сразу на $4\cdot 2=8$. Мы знаем также, что можно сначала провести сложение и затем уже поделить результат на 8. Поэтому

$$y=(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)\cdot\frac{1}{8}.$$

При таком внушительном количестве слагаемых метод Веры воистину спасительный. Нам нужно всего лишь взять 11 раз число, стоящее посреди этой суммы, то есть 6. Получаем 66. И это число нужно поделить на 8, что дает $\frac{66}{8}$. К числу 66 нужно еще добавить 6, чтобы получилось 72 — взятое 8 раз число 9. Таким образом,

$$y=\frac{66}{8}=\frac{72}{8}-\frac{6}{8}=9-\frac{6}{8}.$$

Дробь $\frac{6}{8}$ можно сократить еще на 2. Тогда

$$y=9-\frac{3}{4}.$$

Это приближение отличается от 9 всего лишь на $\frac{3}{4}$ (а раньше отличалось на 3 и $\frac{3}{2}$).

Результат этот мы получили, уже не пользуясь рисунком, хотя все время говорили о том, что следо-

вало бы сделать на рисунке. Теперь мы можем использовать наш метод, вовсе уже не оглядываясь на него. Следующим шагом было бы деление оси x от 0 до 3 на восьмые доли. В этом случае наклон в точках деления постоянно увеличивался бы на

$$2x = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

единицы. Наклоны в этих точках были бы, таким образом, последовательно равны

$$0;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{4};\ \frac{5}{4};\ \ldots$$

Эти числа следовало бы умножить на длину одного шага $\frac{1}{8}$ и затем сложить — вплоть до величины, соответствующей точке $x=3$.

Мы получили бы результат:

$$Y = 9 - \frac{3}{8}.$$

Легко заметить, что открытый нами метод можно продолжать как угодно далеко. Однако последовательность

$$3;\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{8};\ \ldots$$

стремится к 0 (если три торта мы будем равномерно делить на все большее и большее число гостей, то каждому будет доставаться все меньшая и меньшая порция). Поэтому 9 — это именно то число, к которому все более приближаются соответствующие абсциссе $x=3$ ординаты наших все более разглаживающихся кривых.

А 9 равняется 3^2, то есть равно значению функции $y=x^2$ в точке $x=3$. Так же точно доказывается, что ординаты наших кривых в точке $x=1$ стремятся к $1=1^2$; в точке $x=2$ — к $4=2^2$; в точке $x=4$ — к $16=4^2$; и вообще в каждой точке стремятся к квадрату абсциссы этой точки, то есть к x^2. А отсюда следует, что наши кривые, когда их суставы выглаживаются, стремятся к параболе

$$y = x^2.$$

Сформулируем это на языке функций: если нам дано только одно начальное значение, то по функции

$$2x$$

можно восстановить облик функции, для которой эта данная нам функция будет производной.

Одновременно мы получаем тот самый точный метод, который искали. Нужно поделить ось x от данной точки до рассматриваемой точки (в нашем случае — от 0 до 3) на отрезки, умножить длины отрезков на значения функции, которые соответствуют точкам деления, и сложить все полученные таким путем произведения. Мы получаем так называемые приближенные суммы. Когда станем все более сгущать сетку интервалов, то приближенные суммы будут стремиться к значению интеграла в рассматриваемой точке.

Нельзя не сознаться, что приходится тратить немало сил; но что поделаешь — обратные операции требуют тяжкого труда!

Нахождение площадей

Приближенные суммы можно наглядно представить как площади. Каждое выражение любой приближенной суммы есть произведение длины отрезка и значения данной функции. Мы знаем, однако, что произведение можно представить в виде площади прямоугольника, в котором две соседние стороны соответствуют сомножителям этого произведения. Значит, каждое выражение произвольной приближенной суммы можно рассматривать как площадь соответствующего прямоугольника, а всю сумму — как объединенную площадь всех таких прямоугольников.

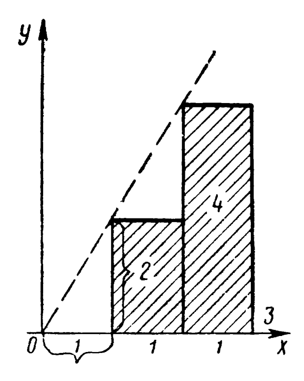
Займемся этим фактом подробней. У нашей первой суммы был такой вид:

$$0+2+4.$$

Произведения здесь не записаны явно; однако в каждом слагаемом присутствуют отрезки, равные единице. Поэтому нашу сумму можно было бы записать в виде

$$1\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 4.$$

Теперь уже можно нарисовать прямоугольники:

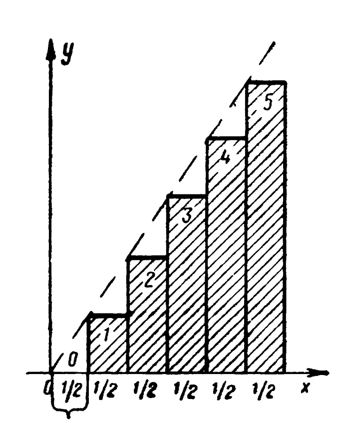


($1 \cdot 0$ можно рассматривать как прямоугольник с основанием, равным единице, — отрезок от 0 до 1 — и высотой, равной 0; очевидно, прямоугольник этот — всего лишь горизонтальный отрезок.)

Вторая наша приближенная сумма имела вид

$$\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 5.$$

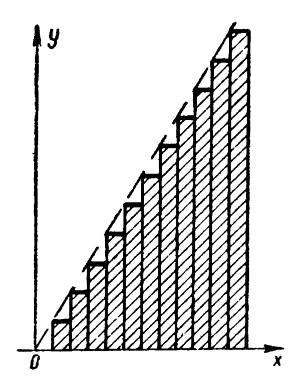
Ей соответствует такой рисунок:



Наша третья приближенная сумма складывалась из 12 выражений:

$$\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{11}{2}.$$

Ее можно легко представить, поделив единицу еще раз пополам; правда, у нас уже не будет возможности указать на рисунке числа, однако же мы покажем, как выглядят в этом случае прямоугольники:



Отсюда видно, что площади ступенчатых фигур все больше приближаются к площади прямоугольного треугольника. Я имею в виду тот треугольник, который на нашем рисунке расположен под наклонной пунктирной прямой. На каждом рисунке появлялась у нас эта же самая прямая. Глядя на первый рисунок, мы можем сразу сказать, что наклон прямой равен

$$2:1.$$

Легко можно убедиться и в том, что прямые, нарисованные на двух последних рисунках, имеют тот же наклон. Именно поэтому я и просила читателя в свое время запомнить эти прямые: прямая с на-

клоном 2 : 1, проходящая через нулевую точку, выражалась уравнением

$$y=2x.$$

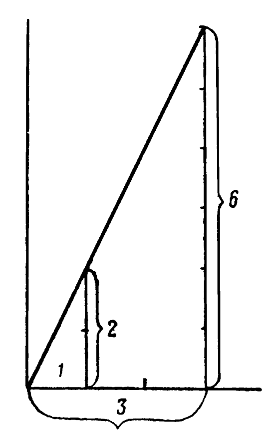
Но ведь это же наша функция! Значит, прямая эта — «портрет» данной нам функции!

И, таким образом, приближенные суммы стремятся просто-напросто к площади под «портретом» данной функции, притом с каждым разом приближаются к этой площади все более точно.

Как жаль, что мы не знали этого раньше; ведь что может быть легче, чем подсчет площади прямоугольного треугольника! Нужно только перемножить катеты и поделить результат пополам. Горизонтальный катет равен отрезку от нулевой точки до рассматриваемой нами точки $x=3$, поэтому длина его равняется трем единицам. Вертикальный катет нам придется определить самим:

$$\text{если } x=3, \text{ то } y=2x=2\cdot 3=6,$$

и поэтому длина второго катета равняется 6 единицам:



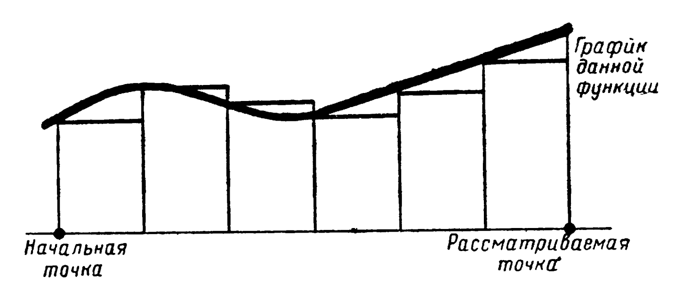
Поэтому площадь треугольника равняется

$$\frac{3\cdot 6}{2}=\frac{18}{2}=9$$

единицам. И это на самом деле совпадает с тем ре-

зультатом, к которому мы пришли раньше столь утомительным путем.

Таким образом, подсчитывать площади можно при помощи интегрального исчисления. Результат, к которому мы пришли, — не случайность. Если только не иметь дела с функцией, не поддающейся никакой дисциплине (такой, например, как безудержно скачущая между значениями 0 и 1 функция Дирихле; частичные суммы этой функции нисколько не собираются к чему-либо стремиться), то есть заниматься «порядочной» функцией, то приближенные суммы всегда можно представить в виде следующей ступенчатой фигуры:



Если теперь неограниченно сгущать интервалы деления, то суммы эти будут приближаться к площади, расположенной под кривой данной функции от начальной до рассматриваемой точки. Площадь под кривой и интеграл обозначают одно и то же, только по-разному сформулированное.

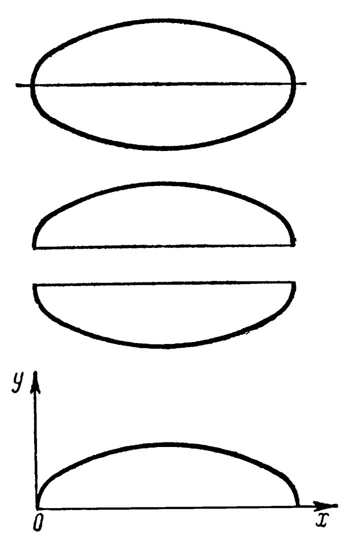
В свою очередь, подсчет площадей еще большим обязан интегральному исчислению.

Мы умеем находить площадь прямоугольного треугольника и знаем, что всякий другой треугольник можно разложить на прямоугольные, а каждый многоугольник на треугольники. Тогда отыскание площадей фигур, ограниченных прямолинейными отрезками, не составит никакой трудности.

Мы привыкли также и к тому, что площадь круга можно отыскать с помощью все более плотно вписанных в круг многоугольников. Однако как можно

вообще отыскивать площади фигур, ограниченных кривыми линиями?

Если дана какая-то криволинейная фигура, то мы можем поделить ее прямыми линиями на такие кусочки, каждый из которых потом можно положить прямолинейным боком на ось x:



Площадь каждой части находится отдельно. Однако отыскание площади, расположенной под кривой, является уже задачей интегрального исчисления. Может случиться, что мы столкнемся с интегралом, который очень легко «угадать» и без труда сказать, какова величина площади.

Например, мы угадали, что интегралом функции x^2 является функция

$$y = \frac{x^3}{3}.$$

Точнее говоря, среди множества интегралов функции x^2 написанная выше функция представляет собой именно тот интеграл, который проходит через нуле-

вую точку, потому что для $x=0$ выполняется равенство $\frac{x^3}{3}=\frac{0^3}{3}=0$.

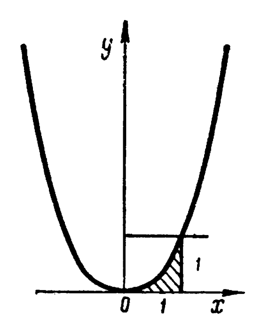
На основании этой информации мы можем сразу подсчитать площадь под параболой, заданной уравнением

$$y=x^2.$$

Здесь площадь от нулевой точки до точки $x=1$ равна в точности тому, чему равно значение интеграла при $x=1$, то есть

$$\frac{1^2}{3}=\frac{1}{3} \text{ единицы площади.}$$

Поэтому площадь, заштрихованная на следующем нашем рисунке и представляющая собой, очевидно, часть квадрата со стороной, равной единице, в точности равняется одной трети площади этого квадрата:

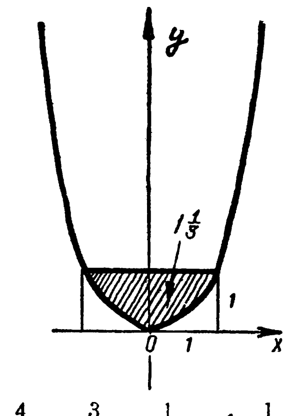


Кому, однако же, может понадобиться величина площади, расположенной вне параболы?

В первый момент результат этот может показаться не таким уж интересным. Однако, владея им, мы можем немедленно отыскать площадь, заключенную между плечами параболы. И сделать это при любой высоте.

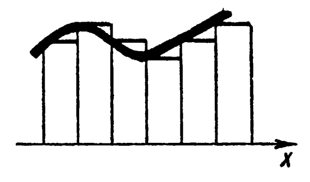
Поскольку третья часть рассмотренного только что единичного квадратика лежит вне параболы, то остальные две трети находятся внутри нее. А добавив еще слева зеркальное отражение этой части внутренней области параболы, получим размеры

площади фигуры, заштрихованной на следующем рисунке:



$$2\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}\text{ единицы.}$$

Мне хотелось бы еще раз вернуться к множеству маленьких прямоугольничков, приближающих нашу плоскость:



Когда мы сгущаем точки деления, наши прямоугольники становятся все более узкими; площадь каждого отдельного прямоугольника будет стремиться к нулю (нам снова придется вспомнить изрядно надоевший пример с тортом, который делится на все большее число частей). Эти сходящие на нет полосы все вместе, однако, дают приближенное значение какой-то определенной площади, отличной от нуля. Число прямоугольников увеличивается с каждым разом так же стремительно, как стремительно они сужаются.

С миру по нитке — голому рубаха. Собравшись вместе, «мелюзга» становится силой. Накладываясь друг на друга, легкие слои песка засыпают со временем даже пирамиды; массы «маленьких людей» стремятся к свободе — и вдруг мир охватывают революции. Такие последствия может иметь «интегрирование» малых дел.

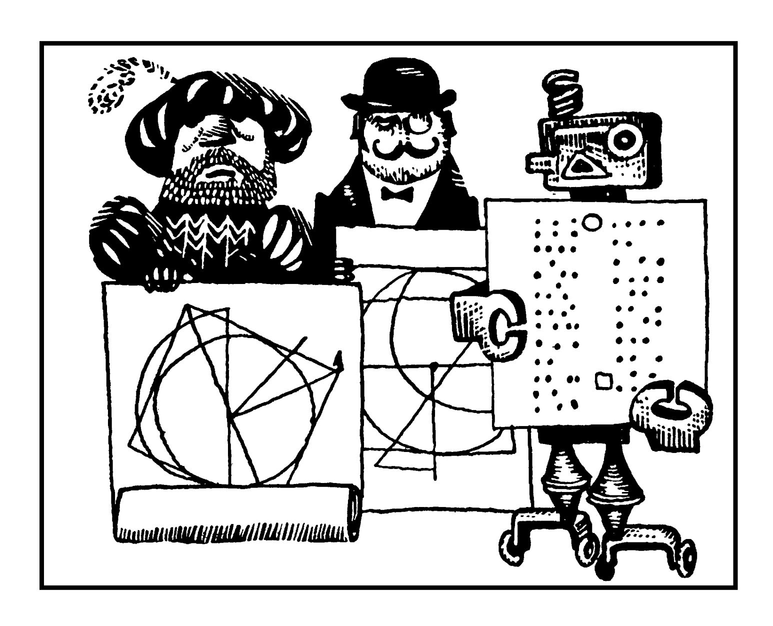
Часть III

САМОКРИТИКА ЧИСТОГО РАЗУМА

18. И все же существует множество математических миров...

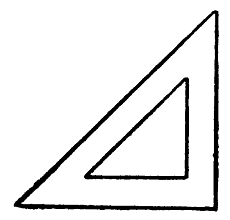
Квадратура круга

Пожалуй, каждому известному математику доводилось быть участником импровизированной сценки: некий таинственный незнакомец доверяет ему свое величайшее сокровище — более или менее объемистую рукопись, в которой «наконец-то осуществлена» квадратура круга. Два последних слова — многие читатели, наверное, сталкиваются с ними не в первый раз — обладают поистине необычной притягательной силой. В чем же здесь, собственно, дело?

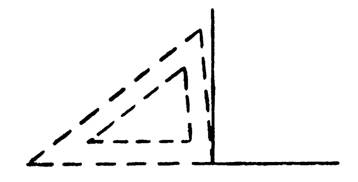


Если кто-то скажет: «Зная оба катета прямоугольного треугольника, я построил этот треугольник», — то у нас тотчас возникает желание спросить: «А какими инструментами ты при этом пользовался?»

Допустим, наш рассказчик взял деревянный треугольник — такой, какие продаются в любом магазине канцелярских товаров, —



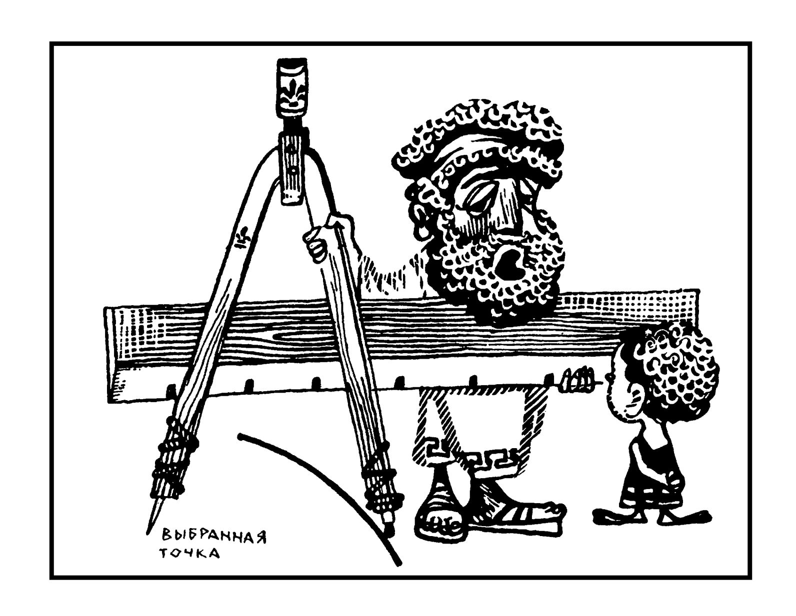
и провел карандашом вдоль его катетов. Однако точность таких приспособлений обычно оставляет желать много лучшего. Если мы перевернем деревянный угольник и приложим его к нарисованному углу, то результат чаще всего будет плачевный:



Таким образом, деревянный угольник не является безукоризненно прямоугольным.

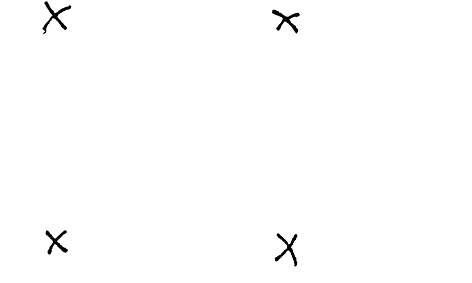
Еще древние греки тщательно подбирали приспособления, наиболее подходящие для выполнения геометрических построений. Линейкой можно было пользоваться только для проведения прямой линии (но не для того, чтобы рисовать прямые углы). Однако и это уже определенный компромисс; редко удается так обработать линейку, чтобы ее края были идеально прямыми. Круг мы можем рисовать при помощи инструмента, намного более точного; нам не нужно обводить карандашом деревянный кружок, — круг «возникает сам» при помощи циркуля. Если плечи циркуля не соединены слишком свободно и если

конец одного плеча мы надежно воткнем в какую-либо точку, то конец другого плеча будет оставаться на неизменном расстоянии от выбранной точки и нарисует нам точный круг:



Древние греки не допускали в свои геометрические построения никаких иных приспособлений, кроме циркуля и линейки. При этом было отмечено, что построение тем больше заслуживает доверия, чем больше мы пользуемся при этом циркулем и чем меньше прибегаем к помощи линейки. Много столетий спустя оказалось, что линейку можно вовсе исключить: все построения, которые удается осуществить с помощью циркуля и линейки, можно с тем же успехом выполнить, пользуясь одним только циркулем. Очевидно, что с помощью циркуля нельзя провести никакой прямой линии; поэтому, если построение ведется с использованием одного только циркуля, то

квадрат, например, определяется при помощи его четырех вершин:



Действительно, фигуру, обозначенную таким образом, можно очень легко себе представить.

Однако мы позволим себе пользоваться и циркулем и линейкой. Естественно, возникает вопрос: какие геометрические построения можно осуществить, пользуясь только этими двумя устройствами?

Проблема квадратуры круга также относится к этому кругу вопросов. Нам дается круг, и от нас требуется построить квадрат, площадь которого равнялась бы площади этого круга.

Мы уже знаем, что площадь круга можно точно определить, используя постоянно улучшающиеся приближения круга прямолинейными фигурами. Если, например, мы нарисуем круг единичного радиуса, то в качестве меры его площади получим совершенно конкретное иррациональное число; число это начинается цифрами 3,14... и вычисление его последующих десятичных знаков можно продолжать сколь угодно далеко. Это иррациональное число играет в математике до такой степени важную роль, что получило даже специальное название — хорошо известное нам со школьной скамьи число π.

Коль скоро, однако, нам известна площадь круга единичного радиуса, мы можем тотчас указать квадрат с такой же площадью. Площадь всякого квадрата мы получаем, возводя во вторую степень длину его стороны. Существует такое число, вторая степень которого равна π, — это число, которое мы обознача-

ем символом $\sqrt{\pi}$. Таким образом, решением нашей задачи будет квадрат со стороной $\sqrt{\pi}$.

Так-то оно так, однако от нас не требовалось узнать, существует ли такой квадрат, — мы должны были выяснить, можно ли его точно построить при помощи циркуля и линейки.

Тот факт, что $\sqrt{\pi}$ является иррациональным числом, то есть числом, записываемым в виде бесконечной десятичной непериодической дроби, сам по себе не составляет еще существенной преграды. Ведь можно же нарисовать квадрат со стороной, равняющейся $\sqrt{2}$, — такой квадрат мы рисовали, решая задачу об удвоении площади пруда.

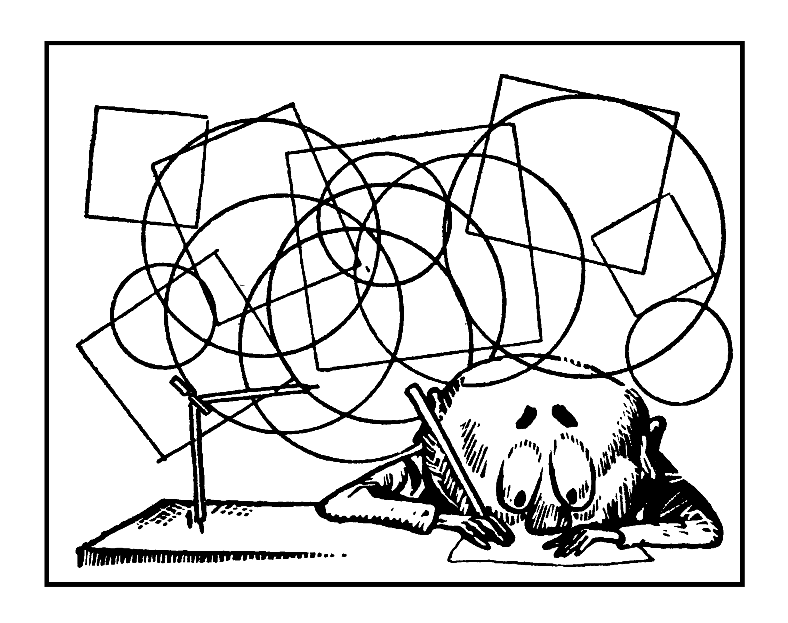
Нельзя ли точно так же и $\sqrt{\pi}$ построить каким-нибудь способом, пользуясь только циркулем и линейкой?

Предпринимавшиеся на протяжении столетий попытки не привели ни к какому результату. Решение пришло лишь тогда, когда геометрическая проблема была переведена на язык алгебры.

Какие фигуры можно рисовать при помощи циркуля и линейки? Прямые и окружности. Но мы уже знаем, что на языке алгебры прямые выражаются уравнениями первой степени, а окружности — уравнениями второй степени. Значит, все геометрические построения, выполняемые при помощи циркуля и линейки, соответствуют решению таких уравнений.

Так вот, удалось доказать, что число $\sqrt{\pi}$, так же как и число π, не может быть получено при решении таких уравнений. Более того, число π вообще не может быть решением какого-либо уравнения, какова бы ни была степень этого уравнения, если только нам не удастся протащить π как-нибудь в уравнение (например, в уравнении $-x-\pi=0$ получим $x=\pi$). Мы говорим, что π не является алгебраическим числом, а относится к *трансцендентным* числам.

Теперь уже нет никакого сомнения в том, что квадратура круга невыполнима. Математике еще раз удалось блестяще показать невозможность решения определенной задачи определенными средствами.



Наряду с открытием, обнаружившим существование трансцендентных чисел, которые не могут быть решениями алгебраических уравнений (можно показать, что основание натуральных логарифмов $e = 2{,}71...$ также является трансцендентным числом, более того — можно показать, что трансцендентные числа составляют большинство иррациональных чисел), я хотела бы подчеркнуть и другой аспект только что приведенных рассуждений — подчеркнуть чистоту метода, на которую древние греки обращали самое серьезное внимание. Мы вовсе не задавались вопросом, существует ли вообще какой-то способ построения квадрата с площадью, равной площади данного круга (кстати говоря, в конце прошлого века появился прибор, который позволяет совершенно механически «изготовлять» такой квадрат); мы ставили совершенно конкретную проблему: возможно ли такое построение с помощью циркуля и линейки.

Проблема, сформулированная так, для каждого математика является уже раз и навсегда отрицатель-

но решенной проблемой. Не хотят в это верить лишь те несчастные сумасброды, воображение которых распалено фантастичностью слов «квадратура круга».

Чистота метода, ясная формулировка условий — вот причины, благодаря которым среди математиков нет таких недоразумений, которые бывают часто в кругу представителей других наук. Математики всех времен и всех стран понимают друг друга очень точно. Они славятся «непонятностью», «заумностью» своего языка — и вместе с тем, пожалуй, ни один человек не формулирует своих высказываний так тщательно, с такой оглядкой на других людей, как это делает математик. В предмете исследований математики содержится, очевидно, такая же доля субъективности, как и в других отраслях науки. Например, точки и прямые в воображении разных людей могут выглядеть очень различно. Один из моих профессоров начал свою первую лекцию с того, что задал студентке неожиданный вопрос:

— Вы когда-либо видели точку?

— Нет.

— А вы когда-либо рисовали точку?

— Да, то есть, — поправилась моя однокашница, — у меня было такое намерение, но мне не слишком повезло.

(Я думаю, что именно благодаря этому ответу наш курс навсегда завоевал симпатии профессора.) Помещенный на рисунке осколок графита или мела, который под лупой напоминает холмик, очевидно, не является точкой. У каждого человека есть свое определенное представление о точке, и в соответствии с этим представлением человек пытается нарисовать точку.

Представление о прямой может быть еще более субъективным. Прямая вовсе не такая уж примитивная линия: маленькие дети и первобытные люди не рисуют прямых, наиболее близкой для них формой является искривленная дуга. Чтобы провести прямую линию, нужен уже в значительной степени дисциплинированный ум.

Исходя из разнообразий представлений, связан-

ных с предметом исследований математики, когда математик хочет сообщить кому-то другому, что он доказал нечто относящееся к точкам и прямым, он делает это следующим образом:

«Я не знаю, как ты представляешь себе геометрические фигуры. Согласно моему представлению о них, через любые две точки можно провести прямую. Соответствует ли это твоему представлению?»

Если он услышит утвердительный ответ, то — и только в этом случае — считает он себя вправе говорить дальше:

«Я доказал нечто и в процессе доказательства не пользовался никакими иными свойствами точек и прямых, кроме одного того, с которым ты уже согласился. Поэтому ты меня поймешь, даже если во всем остальном наши представления о точках и прямых не совпадают».

Математик не предъявляет претензий на выявление абсолютных истин. Его высказывания — это всегда скромные высказывания типа «если... то...». Если мы пользуемся только циркулем и линейкой, то квадратура круга неосуществима. Если под точками и прямыми мы подразумеваем то-то и то-то, то для них имеют место следующие утверждения.

Правда, школа не приучила нас к таким высказываниям, и в предыдущих разделах этой книги мы также не встречали таких формулировок. Когда кто-то передает свои знания другим, всегда лучше преподносить результаты не в завершенном виде, а показывать процесс их становления. Но в лихорадке этого становления строгие условия не выявляются еще совершенно точно. Однако же вслед за этапами напряженного творчества чаще всего наступает период критики; математики оглядываются на пройденный путь и очищают от шелухи сущность полученных результатов.

Система аксиом Евклида

Первым великим поборником систематизации был Евклид. Его геометрический трактат в течение многих веков оставался образцом.

В начале своей работы Евклид выделяет основные понятия и относящиеся к этим понятиям основные условия (до сего дня называемые аксиомами). Следующие затем доказательства предназначаются только для тех, чьи представления о точках, прямых и плоскостях позволяют признать аксиомы Евклида истинными. Поэтому аксиомы и были выбраны Евклидом чрезвычайно тщательно. Мы здесь имеем дело с такими высказываниями, которые отвечают взглядам всех людей; например, среди аксиом содержится утверждение, что через две данные точки можно провести всегда одну и только одну прямую:

Сочинению Евклида уже две тысячи лет, и до сего дня идет спор относительно одной лишь аксиомы. Я имею в виду знаменитую аксиому параллельности: если нам дана какая-то прямая, то через данную точку, не лежащую на этой прямой, можно провести только одну такую прямую, которая не пересечет данной прямой, как бы далеко мы обе прямые ни продолжали:

Мы говорим, что эта новая прямая параллельна данной прямой. К этому вопросу мы вскоре вновь вернемся.

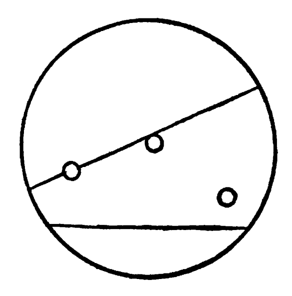
Сначала следует обратить внимание на другую возможность, связанную с аксиоматическим подходом.

Если доказательства теорем ведутся так, что каждый человек может дать волю своей фантазии, со-

вершенно произвольно представляя себе точки, прямые и плоскости, — с той лишь оговоркой, что эти представления должны согласовываться с условиями, содержащимися в аксиомах, — то тогда уже не имеет значения, являются ли вообще предметы, о которых рассуждает данное лицо, в каком-то смысле точками, прямыми и плоскостями. Может случиться, что условия, определенные аксиомами, выполняются также и для совершенно иных предметов. Тогда те же самые доказательства дают нам утверждения, относящиеся и к этим новым предметам. В таком случае мы снова «одним утверждением получаем два утверждения».

С этим мы уже сталкивались, когда говорили о принципе двойственности. Упоминавшиеся там утверждения мог бы признать даже человек со столь богатой фантазией, которая представляет себе точки как прямые, а прямые как точки. (Прошу читателя припомнить приведенный там пример: три точки обозначают треугольник, когда точки эти не лежат на одной прямой; три прямые определяют треугольник, когда прямые эти не принадлежат одной точке, то есть не проходят через одну точку.)

Пусть кто-то, например, говоря о точках, имеет в виду только такие точки, которые лежат внутри определенного круга (при этом точки на окружности уже не рассматриваются), а под прямыми — только ту часть прямой, которая лежит внутри этого круга:



В этом ограниченном мире оказывается истинным высказывание: «Через две точки (то есть через две точки внутри круга) можно провести одну и только

одну прямую» (то есть часть прямой, доходящей до границы круга). Поэтому здесь также останутся истинными все утверждения, касающиеся точек и прямых, которые могут быть доказаны на основании одной только этой аксиомы.

Гиперболическая геометрия

Вернемся теперь к аксиоме параллельности. Нет ничего удивительного в том, что, задумавшись над этим вопросом, читатель очень скоро придет к выводу, что через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой. При этом читатель и не заметит того, что здесь вообще может возникнуть какая-то проблема. Мир воображения большинства людей действительно таков, что аксиома параллельных не подлежит обсуждению.

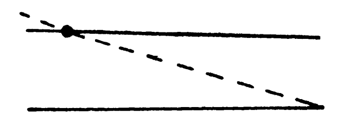
И однако, когда я учила математике десятилетних девочек, мне пришлось столкнуться со следующим фактом.

Каждая школьница получила в руки квадрат и должна была рассказать, какие свойства сторон квадрата бросились ей в глаза. В классе очень скоро прозвучало слово «параллельные» — девочки, разумеется, его уже когда-то слышали. Я спросила, что они имеют в виду, когда говорят о параллельных линиях. Одна из девочек сказала, что параллельные имеют одинаковое направление. Другая — что находятся на постоянном расстоянии друг от друга. Третья — что не пересекаются, как бы далеко мы их ни продолжали. «Все это верно, — сказала я, — каждое из этих свойств может быть принято в качестве признака параллельности. Остальные два свойства будут из него вытекать». И тогда поднялась из-за первой парты самая вдумчивая, серьезно мыслящая ученица, маленькая Аня: «Нехорошо считать признаком параллельности то, что две прямые никогда не пересекаются; ведь можно представить себе две прямые, которые не остаются на одинаковом расстоянии друг от друга и все же никогда не пересекутся, сколь-

ко бы мы их ни продолжали». И она показала мне на рисунке, какие прямые она имеет в виду:

Мне пришлось поверить, что ее интуиция действительно допускает такую возможность.

Очевидно, этот вопрос нельзя исследовать, опираясь на опыт. Если наша «параллельная» наклонена так:



то, продолжая соответственно обе прямые, я могу еще убедиться, что они пересекаются. Допустим, однако, что прямая наклонена много меньше и что я буду делать ее наклон равным одной десятой, одной сотой, одной тысячной — и так далее — угла наклона. Как мне тогда узнать, не дойду ли я при неограниченном продолжении этой последовательности до наклона столь малого, что наша прямая уже действительно не пересечет нижней прямой? Бесконечной дороги никогда нельзя пройти *до конца*.

Мы уже встречали пример линии, которая подходит к прямой все более близко, но никогда ее не достигает, — этим свойством обладает любая ветвь гиперболы.

Так что нет ничего удивительного в том, что существуют люди, способные представить себе таким же образом сближение прямых линий. Наше воображение формируется миром наших чувств. Я думаю, например, что кто-то, надолго разлученный с любимым человеком, может отчетливо нарисовать в своем воображении мучительную картину такого безгранич-

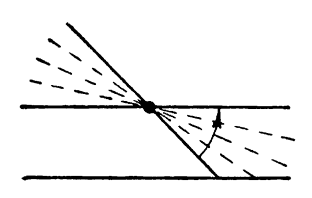
ного приближения к объекту своей любви, когда встреча все же невозможна.

Как бы то ни было, со времен Евклида постоянно появлялись люди, точка зрения которых совпадала с точкой зрения Ани, моей ученицы. Люди эти не были, безусловно, уверены в своей правоте — как-никак они шли против мнения большинства. Но они оспаривали утверждение, что аксиома параллельности столь же очевидна, как и прочие аксиомы. «Если бы можно было доказать эту аксиому, опираясь только на такие условия, которые не вызывают у нас сомнений, то мы признали бы и эту аксиому».

В течение столетий математики тщетно пытались доказать аксиому параллельных, опираясь на другие аксиомы.

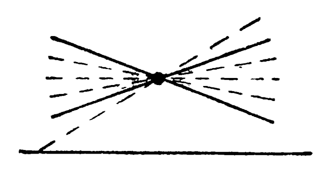
Венгерский математик Янош Бояи был одним из первых, кто отважился открыто принять противоположную точку зрения: «Нельзя доказать аксиому параллельности, потому что она не истинна.

Мне это представляется так: если мы проводим через точку, лежащую вне данной прямой, какую-то новую прямую, которая пересекает данную прямую, и начинаем эту новую прямую вращать, то наша первая прямая будет пересекаться с новой прямой в точке все более удаленной, так что, наконец, прямые разойдутся навсегда.



Эта «отклонившаяся» прямая все еще несколько наклонена к неподвижной прямой. Если подвижная прямая и далее будет вращаться, то, очевидно, в течение какого-то времени она не будет пересекать ниж-

ней прямой — до тех пор, пока ее второе плечо не наклонится ближе к неподвижной прямой:



Таким образом, через внешнюю точку проходят две «отклонившиеся» прямые. Никакая из бесконечного числа прямых, лежащих между ними, не пересекает данной прямой, потому что пересекают ее только прямые с большим наклоном.

Идите ко мне все, кто так же смотрит на вещи, и я построю вам новую геометрию!»

Итак, Бояи принял в качестве основного условия отказ от аксиомы параллельности, сохраняя, однако, все остальные аксиомы Евклида, и поставил вопрос: какие утверждения, относящиеся к точкам, прямым и плоскостям, можно получить, исходя из этих условий?

Так возникла геометрия, носящая название гиперболической (каждая ветвь гиперболы ведет себя по отношению к собственной асимптоте подобно «отклонившейся» прямой) и весьма отличная от евклидовой геометрии; дело убеждения — присоединиться к одной из них.

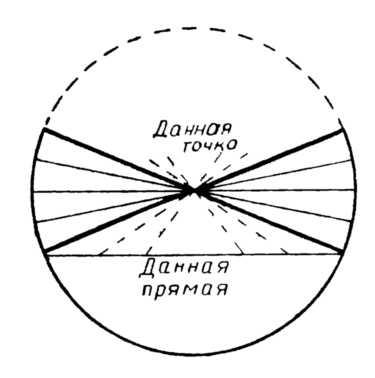
Одновременно с Бояи и другие ученые обнаружили возможность существования неевклидовой геометрии. К тому же самому открытию пришел в России Николай Лобачевский. Это достаточно распространенное явление: оказывается, что, когда та или иная проблема начинает «созревать», на каком-то этапе появляются математики, которые чувствуют это независимо друг от друга в разных точках земного шара.

Есть еще один вопрос, который не может не возникнуть и на который необходимо дать ответ. Что, если удастся, несмотря ни на что, доказать аксиому

параллельности, так что вся гиперболическая геометрия окажется покоящейся на ложной основе и рано или поздно в ней обнаружится клубок противоречий?

Мы можем уже сейчас ответить на этот вопрос. Дело в том, что гиперболическая геометрия и геометрия Евклида абсолютно равноправны с точки зрения их допустимости. Если бы гиперболическая геометрия приводила к какому-то противоречию, то и евклидова геометрия также должна была бы оказаться противоречивой.

Это следует из того факта, что, не выходя за рамки евклидовой геометрии, можно построить «модель» гиперболической геометрии, и моделью этой будет тот уже знакомый нам ограниченный мир, все точки и прямые которого заключены внутри круга, лежащего внутри плоскости. Мы уже имели случай убедиться в том, что точки и прямые, понимаемые в таком ограниченном смысле, удовлетворяют одному из основных условий геометрии Евклида. Можно показать, что эти точки и прямые удовлетворяют всем аксиомам (если мы только соответственно изменим понятие совпадения), за исключением аксиомы параллельности. Вместо аксиомы параллельности истинным высказыванием будет ее отрицание, то есть основная посылка Лобачевского — Бояи:



«Отклонившиеся» прямые — это такие прямые, которые проходят через данную точку и крайние точки данной прямой, то есть точки на границе круга; прямые, лежащие между ними, не пересекают данной прямой (внутри круга) даже в евклидовом смысле. Так что аксиома Лобачевского — Бояи не противоречит остальным аксиомам Евклида. В этом ограниченном мире все аксиомы гиперболической геометрии прекрасно уживаются друг с другом!

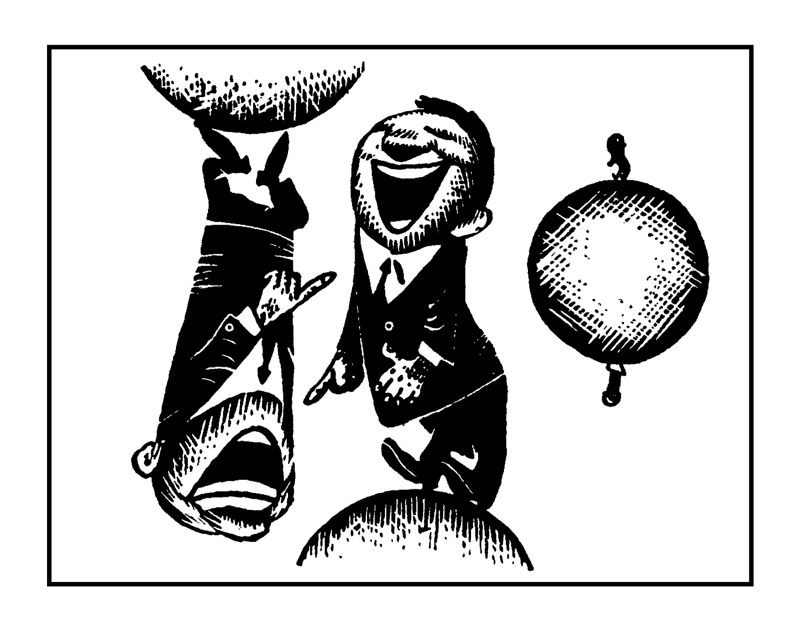
Разные геометрии

Раз мы столкнулись с двумя равноправными геометриями, ничто не мешает нам увеличить их число. Теперь уже мы можем продолжать эту игру независимо от зрительного представления: вместо какой-либо аксиомы, не выводимой из остальных аксиом, мы можем принять ее отрицание и можем исследовать, какие утверждения удается доказать, опираясь на эти противоположные утверждения. Можно даже принимать за исходные совершенно иные условия. Нет никакой нужды придерживаться точно условий, подсказанных данным представлением, — ведь гиперболическая геометрия показала нам, что условия эти очень шатки и что два человека, руководствующиеся собственными представлениями, могут прийти к совершенно различным выводам.

Следовательно, можно построить целый ряд геометрий. И это не пустая игра. Современная физика именно на основе таких абстрактно построенных геометрий смогла пролить свет на множество явлений реального мира.

Взгляды человека не являются чем-то окостенелым, они постоянно меняются, формируются заново под влиянием развития науки.

Когда было обнаружено, что Земля не является плоским кругом, когда пришлось примириться с тем фактом, что наши антиподы ходят в соответствии со старыми тысячу раз осмеянными представлениями «вниз головой», — тогда взгляды человека колоссально изменились.



Когда достижения теории относительности, утвердившись в современной физике, проникнут в общественное сознание, тогда, по прошествии какого-то срока, взгляды Евклида перестанут господствовать в сознании большинства людей и одна из тех геометрий, которые кажутся сейчас абстрактной игрой, может превратиться в «геометрию действительности».

Добавление о четвертом измерении

Мне хотелось бы еще раз вернуться к слову «модель». В пределах евклидовой геометрии нам удалось построить «модель» гиперболической геометрии, когда мы при помощи круга выделили часть евклидовой плоскости, а затем для каждой фигуры гиперболической геометрии нашли соответствующий объект внутри круга и для каждого утверждения гиперболической геометрии — соответствующее утверждение,

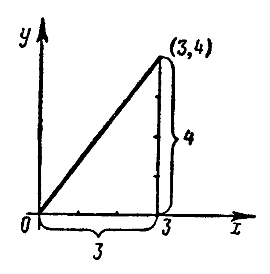
имеющее место внутри круга. Такую связь двух ветвей науки мы встречали уже раньше, когда в алгебре нашли модель для геометрии. Тогда мы точкам поставили в соответствие пары чисел, а линиям — уравнения с двумя неизвестными и, таким образом, выделили точно определенную часть алгебры, в которой каждая геометрическая фигура была представлена каким-то алгебраическим образованием, а каждая геометрическая закономерность выражалась в виде какого-то алгебраического утверждения.

Благодаря этому мы можем искать геометрические законы алгебраическим путем и, наоборот, геометрические результаты могут быть использованы при изучении функций, соответствующих кривым.

Все это относится к геометрии на плоскости, но без труда может быть перенесено также и на пространство. В пространстве для определения точки необходимо, оказывается, иметь три числа (если упомянутое птичье гнездо находится на вершине дерева, то для точного определения его положения нужно знать еще и высоту дерева, — знать, какой высоты лестницу нужно взять с собой, чтобы добраться до гнезда). Фигурам в пространстве будут соответствовать уравнения с тремя неизвестными. Эти неизвестные можно обозначить x, y, z. Если, например, мы имеем дело с уравнением вида $z=3x+2y$, то сразу видно, что значение z зависит как от выбора значения x, так и от выбора значения y. Это z является так называемой функцией двух переменных (в жизни мы часто сталкиваемся с такими функциями; например, плата за страхование жизни одинаково зависит и от возраста страхуемого и от страховой суммы). Стало быть, из каждого факта, доказанного для геометрических фигур в пространстве, вытекает одновременно некоторое утверждение, касающееся функций двух переменных.

В пространстве нам не нужно начинать все сначала. Бо́льшую часть утверждений, верных на плоскости, можно легко обобщить на случай пространства. Например, на плоскости расстояние от какой-либо

точки — пусть это будет точка (3; 4) — до нулевой точки мы находим так:



Это расстояние равняется гипотенузе прямоугольного треугольника, катеты которого не что иное, как координаты рассматриваемой точки. А по теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Отсюда нужное нам расстояние равняется

$$\sqrt{3^2+4^2}.$$

Поступая так же, мы можем показать, что, например, расстояние от точки, которую определяют в пространстве координаты (3; 4; 5), до нулевой точки равняется

$$\sqrt{3^2+4^2+5^2}.$$

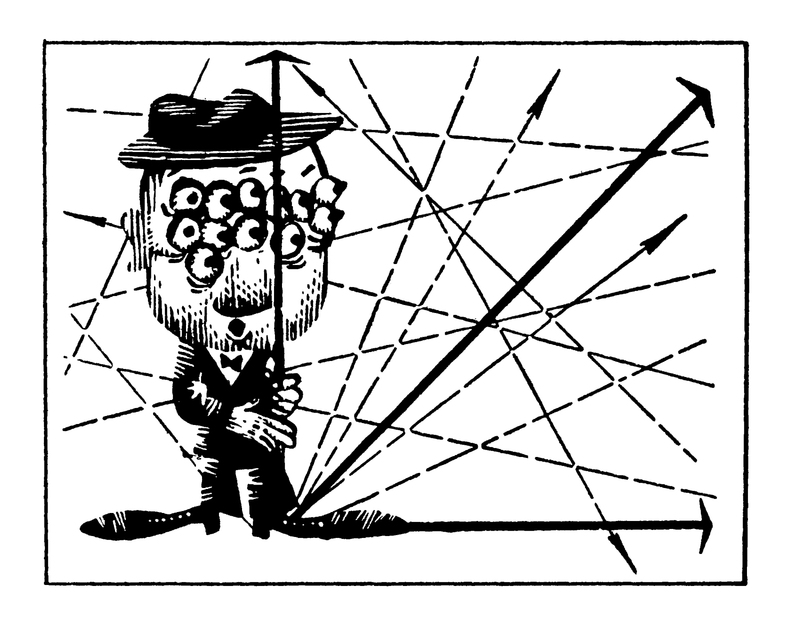
Часто можно переити из плоскости в пространство, делая такое простое обобщение. Поэтому многие утверждения, касающиеся функций одной переменной, легко удается обобщить для функций двух переменных.

Но нам приходится нередко сталкиваться с функциями трех, четырех — словом, любого числа переменных. Может показаться, что здесь возникает непреодолимое препятствие: ведь если из двумерной плоскости можно перейти в трехмерное пространство, то из трехмерного пространства выйти уже некуда. В нашем распоряжении нет четырехмерного пространства. Однако с алгебраической моделью можно поступать так, как если бы это пространство существовало.

Можно, например, четверку чисел (3; 4; 5; 6) назвать точкой, а число

$$\sqrt{3^2+4^2+5^2+6^2}$$

расстоянием от этой точки до нулевой точки. Поступаем с этими числами так же, как с аналогичными числами, соответствующими «реальным» точкам, и смотрим, какие утверждения вытекают из этого для функций трех переменных. Можно убедиться в том,



что утверждения, полученные при помощи такой фикции, действительно истинные. Поэтому следует поступать так, как если бы четвертое измерение существовало.

Точно так же можно ввести абстрактные пространства пяти, шести и так далее — вплоть до бесконечного числа измерений. Прототипом их всегда останется наше хорошо известное обжитое пространство,

а целью их введения — полезность при исследовании функций.

Этот способ формирования понятий для нас уже не в диковинку: точки пространств с большим числом измерений являются идеальными элементами. Они приходят из мнимого мира, оказывают нам помощь, а если мы захотим, то исчезают, оставляя нам полученные нами результаты, способные существовать в науке и без их помощи.

19. Здание потрясено

Великие критические эпохи всегда ставят задачу очищения полученных результатов от всевозможной шелухи. Приходится снова и снова пересматривать все накопленное, отделять вечное от временного. Неизбежно приходится возвращаться притом к истокам, к основанию всех накопленных нами результатов, как бы заново освещая те основные положения, на которых покоится здание науки. Все это можно выразить одним словом — аксиоматизация. Система аксиом точно определяет содержание той или иной области математики: мы относим к этой области все, что может быть получено на основании одной и той же системы аксиом.

Теория групп

Однако, оглядываясь на пройденный нами путь, мы не можем не вспомнить, как то и дело в наших рассуждениях выплывала навязчивая мысль: существуют понятия, которые появляются в самых различных областях математики. Так вырисовывается второй вид деятельности: выделить эти элементы, общие для различных областей математики, и сделать их объектами самостоятельных исследований.

Вспомним, например, что умножение и деление рациональных чисел, за исключением случая, когда нуль оказывается делителем, — действия, всегда выполнимые, причем в результате всегда снова получается

рациональное число. Но мы уже научились заранее «изгонять» нуль и тем самым ограждать себя от неприятностей. Мы можем теперь, на более высоком уровне наших знаний, сказать, что построение рациональных чисел представляет собой замкнутую группу относительно операций умножения и деления.

Целые числа ведут себя уж не так сговорчиво. Операция деления заставит нас выйти за пределы их дружной семьи, но как и рациональные числа, целые числа образуют замкнутую группу относительно операций сложения и вычитания. Разумеется, это верно лишь тогда, когда мы говорим о положительных и отрицательных числах. Легко видеть, что, складывая и вычитая целые числа, мы не получим ничего, кроме целых чисел. Более того: даже беспокойный нуль удивляет здесь своей покладистостью.

Но для того чтобы числа составляли замкнутую группу относительно определенных операций, вовсе не требуется так много чисел, как в предыдущих примерах. Возьмем всего лишь два числа:

$$+1 \text{ и } -1.$$

Сколько бы эти числа ни умножались и ни делились друг на друга, в результате все равно мы получим одно из них: $+1$ или -1.

Попробуем теперь выйти за пределы арифметических операций. Вспомним векторы. Сколько раз уже мы совершенно автоматически пользовались тем, что результирующая двух векторов — снова какой-либо вектор! То есть снова мы имеем дело с замкнутой группой — на этот раз при сложении векторов. Но мы давно уже отметили, что в этом случае мы говорим о сложении в переносном смысле, имея в виду сложение сил или движения.

Итак, понятие группы выводит нас во все более широкие области.

Можно было бы приводить еще и еще примеры — они только подтвердили бы то, что мы уже наглядно увидели. Группа оказывается действительно общим понятием для самых различных областей математики. Самостоятельное исследование этого понятия ведет теория групп — и исследование это оказывается

очень плодотворным. Теория групп составляет ядро современной алгебры и используется повсеместно в теоретической физике. Даже различные геометрии можно рассматривать попросту как теории некоторых групп.

Теория множеств

Сами группы представляют собой совокупности элементов, множества с определенными свойствами. А понятие множества едва ли не самое распространенное в математике; мы сталкиваемся с ним на каждом шагу, в самых различных областях. Действительно, когда мы говорим о чем-либо в математике, мы неизбежно высказываем при этом суждения то о точечных множествах, то о числовых множествах, то о множествах каких-либо функций.

Немецкий математик Кантор сделал эти множества предметом самостоятельного изучения, создал теорию множеств.

Вспомним некоторые факты. Мы говорили, например, о множестве рациональных чисел, затем рассматривали соответствующее ему точечное множество на числовой оси и устанавливали, что каждая точка этого последнего множества является точкой сгущения. Это одно из важнейших понятий канторовской теории множеств. Точка называется точкой сгущения данного множества, если в любой, сколь угодно малой ее окрестности все еще имеются точки нашего множества.

Мы уже видели на примере, какие методы используются в теории точечных множеств; приведем еще пример, чтобы методы эти стали еще яснее.

Снова обратимся к нашей неизменной спутнице — последовательности натуральных чисел:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots .$$

Никакая сила не заставит эту последовательность стать более густой или более редкой. Всегда каждое последующее число будет больше предыдущего ровно на единицу. Однако, если мы заставим бесконечное

множество чисел сгрудиться в конечном интервале, как, например, последовательность чисел

$$1;\ 1/2;\ 1/3;\ 1/4;\ 1/5;\ \ldots,$$

которые все лежат в интервале между нулем и единицей, то у таких чисел наверняка должно будет где-то внутри интервала отыскаться место сгущения.

Это можно доказать в самом общем виде так.

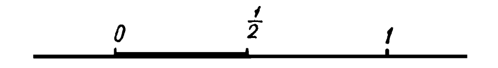
Примем, что всякая точка нашего бесконечного множества лежит в интервале, расположенном между 0 и 1; где именно находится та или иная точка, нас



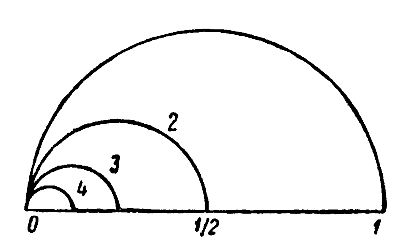
не интересует. Разделим этот интервал пополам. Тогда по крайней мере в одной половине все еще находится бесконечное число точек множества. Если бы в обеих половинах лежало только конечное число точек множества — пусть один миллион справа и десять миллионов слева, — то полное множество содержало бы одиннадцать миллионов элементов. Это немало, но это *конечное* число! А по условию полное множество должно быть бесконечным. В нашем примере бесконечное число точек оказывается в левой половине интервала.

Рассмотрим теперь вместо первоначального полного интервала ту его половину, в которой осталось бесконечное число точек множества. (Если обе половины содержат бесконечное число точек каждая, то мы рассматриваем любую половину.)

Итак, рассматриваем только левую половину первоначального интервала:



Поступаем с ней точно так же, как и со всем интервалом: делим пополам. Тогда хотя бы в одной половине будет бесконечное множество точек. Снова делим — на этот раз половину первоначального интервала — пополам. Так делить и так рассуждать можно до бесконечности. Мы получим последовательность интервалов, расположенных все более густо и вложенных друг в друга. В нашем примере это выглядит так:



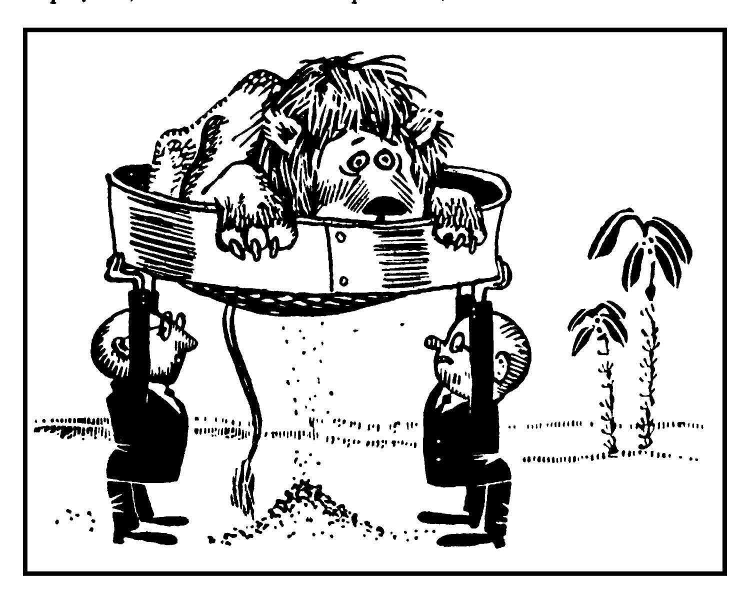
Легко видеть, что длины этих интервалов стремятся к нулю. Мы уже вспоминали «шуточный пакет» — сверток, где под каждой оберткой оказывается новая упаковка, а в середине — комок бумаги. Так же и все без исключения интервалы содержат одну и ту же точку, единственную и общую для всех интервалов. Эта точка и будет точкой сгущения множества.

Действительно, какую бы малую окрестность точки мы ни взяли, всегда в эту окрестность попадет, начиная с какого-то (пусть даже очень большого, но все же конечного!) номера, бесконечное число вложенных друг в друга стягивающихся интервалов; причем интервалы эти содержат не только одну, а даже бесконечное число точек множества.

Мы уже достигли столь высокой степени учености, что можем ответить на вопрос, каким образом математик ловит льва в Сахаре.

Общеизвестным способом охотятся на львов физики-экспериментаторы. Их прием настолько прост, что без труда может быть понят и применен любым новичком. Физик-экспериментатор высыпает Сахару

вместе со всем ее содержимым в решето и начинает просеивать. То, что проходит сквозь сетку, — это Сахара; то, что остается в решете, — лев.

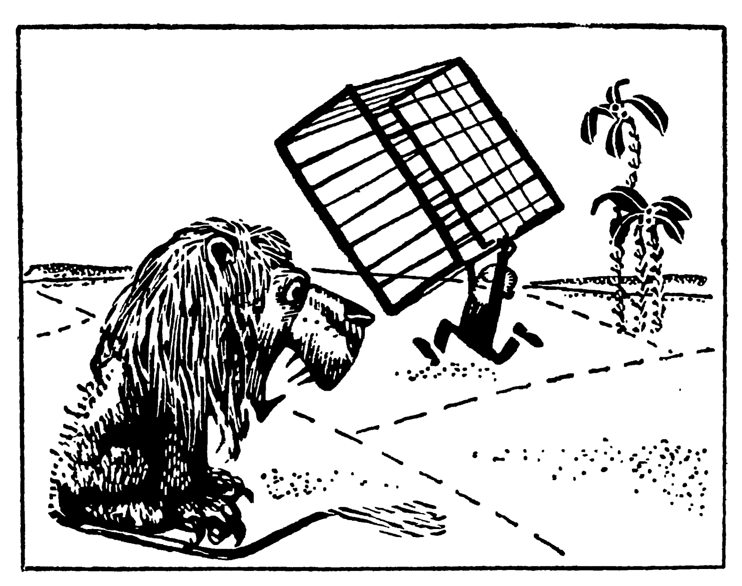


Математик же рассуждает так:

Имеются два случая.

Первый случай. Лев лежит.

Мы заготавливаем прежде всего клетку, которая открыта внизу и размером больше льва. Затем делим Сахару на две равные части; по крайней мере в одной из них находится лев. (Если лев лежит на линии раздела, мы считаем, что он находится в обеих полу-Сахарах сразу.) Исследуем полученную нами полу-Сахару. Прежде всего мы можем выбрать удобное для нас деление, при котором лев останется только в одной полу-Сахаре. Продолжим это деление пополам так, что получим при этом сжимающиеся области. Рано или поздно одна из этих областей окажется меньше основания клетки. В этой области находится лев. Поставим на эту область нашу клетку — и лев пойман.



Второй случай. Лев бегает по Сахаре. В этом случае наш метод неприменим.

Конец, точка.

Вот и все относительно теории точечных множеств.

Мы уже познакомились с теоретико-множественными доказательствами, которые относились не только к точечным множествам. У нас есть еще метод сочетаний, при помощи которого мы установили, что множества рациональных и натуральных чисел имеют одинаковую мощность, тогда как мощность множества иррациональных чисел превышает мощность множества рациональных чисел. Эти методы применимы для любого произвольного множества. Вспомним, как мы вообще знакомились с понятием множества: от множества танцующих кавалеров и дам мы перешли к менее веселым множествам.

Все, что мы говорим о мощностях множеств, может относиться к танцующим парам, к действительным числам и даже к высказываниям, которые можно сформулировать на русском языке.

Кантор исследовал именно такие «множества вообще». Он получил много прекрасных результатов, относящихся к мощностям бесконечных множеств, показав, сколь содержательна идея, позволяющая распространять конечные числовые понятия на бесконечность. Он показал, например, что, кроме мощности множества натуральных чисел и мощности множества действительных чисел, существует много других бесконечных мощностей. Для всякого множества произвольно большой мощности существует множество еще более высокой мощности. Венгерский поэт Вабиц назвал это нагромождение все более высоких мощностей «громоздящимися зданиями бесконечности».

Кантор ввел, по примеру операций с нашими «маленькими» числами, арифметические действия с мощностями: сложение, умножение.

Началась большая игра в самом большом смысле слова — игра с бесконечностью.

Казалось, человеческий ум никогда не подымался выше.

Парадоксы

И вдруг все здание заколебалось.

В математике, этой до скучного крепко сколоченной науке, в конце прошлого века одно за другим стали вылезать воистину скандальные противоречия. И страсти накалились до предела в тот момент, когда окончательно выяснилось: гнездо противоречий — в теории множеств, в этом фундаменте, сомнения в прочности которого могли показаться кощунством.

В массе этих противоречий особенно следует отметить одно — одно из серьезнейших! — так называемую антиномию Рассела (или парадокс Рассела).

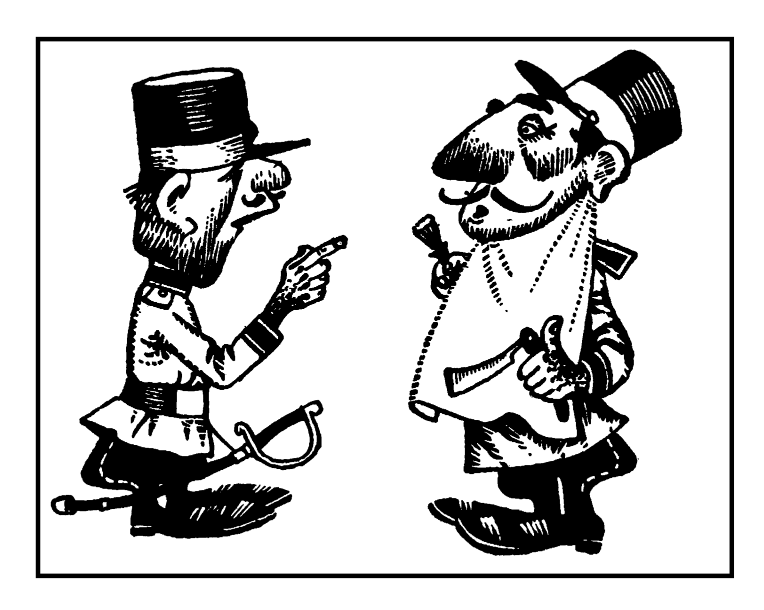
Сначала — в той шутливой форме, в которой она хорошо известна.

Дадим определение: армейским парикмахером называется такой солдат, который обязан брить всех, кто служит в его подразделении и не бреется сам. При этом — в целях экономии времени — запрещает-

ся брить тех, кто бреется сам. Нам нужно выяснить, должен ли этот солдат брить сам себя.

Если да, то он один из тех, кто бреется сам. Однако именно такого рода людей парикмахеру брить запрещено.

Если нет, то он принадлежит к числу тех, кто не бреется сам. А именно таких он обязан брить!



И так нехорошо, и этак плохо.

В этой широко распространенной логической шутке, естественно, еще нет точных формулировок. Рассмотрим теперь строгий пример.

Обычно само множество не является одним из своих собственных членов. Например, элементы множества натуральных чисел — не множества, а числа; само множество — именно как м н о ж е с т в о — к числу своих собственных элементов принадлежать не может.

Разумеется, мы сплошь и рядом имеем дело с такими множествами, элементами которых являются

также множества. Представим себе, например, все возможные числовые множества и рассмотрим их совокупность как единое множество. Элементом такого множества оказывается, например, множество натуральных чисел; другим элементом — множество чисел, меньших десяти, и так далее. Каждый элемент — множество. Однако само множество не может быть отнесено к элементам, потому что элементом мы считали множества, составленные лишь из чисел, а само множество составлено из множеств, а не чисел.

Объединим теперь в единое множество все возможные множества. Мы получаем пример такого множества, которое является своим собственным элементом. Ибо оно само является множеством, а всякое множество должно находиться среди его собственных элементов.

Если кому-то из читателей покажется, что два последних абзаца слишком трудно понять, то можно пропустить эти абзацы и не стараться непременно в них разобраться,— в дальнейшем мы сможем обойтись и без них. Достаточно будет, если мы примем следующую точку зрения: упорядоченное множество не может обладать этим свойством. А упорядоченным мы называем множество в том случае, если оно не является ни одним из своих элементов; при этом мы вовсе не обращаем внимания на то, что на свете существуют другие множества. Представим себе, что нам удалось собрать в одном множестве все упорядоченные множества.

Является ли полученное множество упорядоченным?

Если оно упорядоченное, то оно должно среди всех прочих упорядоченных множеств находиться среди своих элементов. Однако — стоп! Ведь тогда оно перестает быть упорядоченным!

Если же оно не является упорядоченным, то оно не может находиться среди своих собственных элементов — ведь все эти элементы суть упорядоченные множества! Но ведь именно в таком случае мы и называем множество упорядоченным!

Таким образом, если множество упорядоченное, то оно не упорядоченное, а если оно не упорядоченное, то оно упорядоченное. В любом случае мы впадаем в противоречие.

И ничего здесь нельзя сделать.

Нельзя также принять и такой точки зрения: мы слишком прытко развивали теорию множеств; оставим ее и вернемся к более скромным разделам математики, к разделам, где мы можем чувствовать себя в полной безопасности. Мы знаем, как возникла теория множеств; знаем, что ее идеи пронизывают все области математики. Если теория множеств ошибочна, то в математике не остается ничего неуязвимого.

До сего дня не удалось полностью заделать трещин, появившихся в результате этой встряски. Однако ни у нас с вами, ни у тех, кто пользуется математикой на каждом шагу в своей повседневной практике, пока нет оснований для удручающих выводов.

Правда, математики часто ведут себя так, как ведет себя большинство людей перед лицом грозящей опасности. Бо́льшая часть математиков вовсе не пожелала ни о чем слушать; каждый занимался своим делом, как и раньше, и раздраженно протестовал, когда кто-то все же вспоминал об опасности.

Некоторые, однако, пытались спасти положение.

Естественно, что вначале пытались отыскать ошибку в парадоксе Рассела. Сам Рассел придерживался того мнения, что определение множества ошибочно само по себе, ибо содержит «порочный круг», так как в формулировку этого определения входит то самое множество, которое требуется определить. Все упорядоченные множества тогда только могут быть объединены в одно множество, когда для этого возникшего множества уже решен вопрос о его упорядочении — вопрос, является ли оно своим собственным элементом. Снова «веселый» результат: чтобы построить множество всех упорядоченных множеств, мы должны исследовать и само это множество — то самое, еще не построенное.

Однако едва ли не на каждом шагу в математике, в любой области математики мы сталкиваемся с такими порочными кругами. Едва мы заговорили о натуральных числах, как нам пришлось пойти по такому пути. Мы повсеместно пользовались определениями такого рода: «Берем наименьшее число, которое обладает таким-то свойством». Это число участвует в своем собственном определении. В самом деле, наименьшее число можно выбрать только из всех чисел, обладающих определенным свойством; среди этих чисел находится и оно само, это наименьшее число.

Интуиционизм

Решительную попытку спасти положение предприняли интуиционисты во главе с Брауэром. (Название «интуиционизм» выбрано не слишком удачно; из-за этого названия взглядам интуиционистов нередко приписывают извращенный смысл.) Идеи интуиционистов возникли много раньше того, как были выявлены парадоксы теории множеств, однако именно парадоксы как бы пришпорили интуиционистского конька. Новый интуиционизм связан с именем Брауэра.

Брауэр начисто отверг всю предшествующую математику и попытался заново построить эту науку, построить на совершенно новой основе. Он пользуется только тем, что может быть каким-либо образом построено: то, что однажды построено, становится неоспоримым фактом, который не уничтожить никакими парадоксами. Брауэр отверг «чистые доказательства существования», — например, «основную теорему алгебры». Ведь теорема эта не дает нам способа построения корней уравнения. Брауэр ничего не хочет знать об «актуальной бесконечности», ибо мы можем построить только конечное число элементов множества — пусть даже и можно продолжать неограниченно процесс построения. Если принять точку зрения Брауэра, то придется признать бесконечное множество только «потенциальной бесконечностью», которая всегда находится в состоянии становления

и никогда не может рассматриваться как готовая и замкнутая.

Таким образом, от классической математики остаются одни развалины, а то, что переживает катастрофу, становится — после введения в каждом отдельном случае эффективных построений — туманным и запутанным.

По-настоящему спасительным оказывается только путь, найденный Гильбертом. Здесь мы сталкиваемся с открытиями, которые выходят далеко за рамки первоначальной задачи, — отыскать способ борьбы с опасностью.

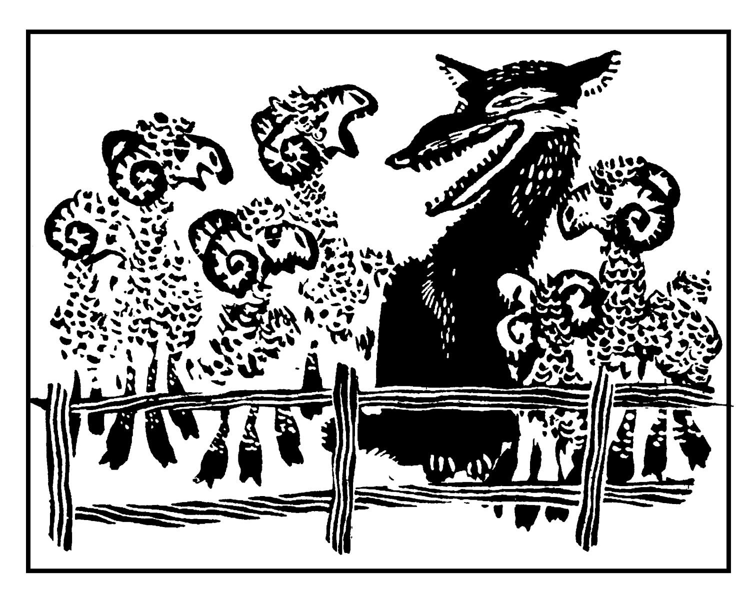
Рождается новая, плодоносная ветвь математики. О ней и пойдет речь в дальнейшем.

20. Форма освобождается

Не следует думать, что теория множеств и по сей день отягощена грузом противоречий. Когда пришло время — а именно противоречия и сделали столь неотложным его приход — упорядочить первоначальную, «наивную» теорию множеств и установить систему аксиом этой теории, — когда это время пришло, математики стали стремиться к такому сужению понятия множества при помощи исходных условий, чтобы, оставив все ценное, исключить множества, являющиеся источником неприятностей. Однако этот способ разрешать противоречия выглядит более чем искусственно. Воспользовавшись удачным выражением выдающегося ученого Анри Пуанкаре, можно сказать, что мы, стараясь уберечься от волков, ограждаем пастбище оградой, но делаем это, не будучи уверенными, что какой-либо волк не остался внутри ограды.

Мы вовсе не гарантированы от появления новых противоречий.

Гильберт, один из величайших математиков нашего времени, в течение двадцати последних лет своей жизни стремился выявить все укромные уголки внутри ограды, построенной из аксиом. Он признавал, что недоверие к определениям, содержащим



«порочный круг», «чистые доказательства существования» и «актуальную бесконечность», естественно и обоснованно. За всем этим может скрываться опасность. Почему, однако, мы пользуемся этими столь опасными «сверхконечными» понятиями, превышающими наш конечный разум?

Оказывается, у нас есть веские основания не пренебрегать этими понятиями, и без особой необходимости мы от них не откажемся. Понятия эти дают нам возможность строить содержательные теории, обнажающие взаимосвязь между различными, кажущимися далекими областями науки. О том, насколько это важно, в качестве «отрицательного примера», свидетельствует раздробленная, словно искромсанная на куски математика интуиционистов. Мы не хотим отбрасывать «опасные понятия», так как именно они спаивают математику в одно громадное целое.

Сверхконечные методы играют в логике роль, подобную роли бесконечно удаленной прямой или мнимой единицы i в математике. Их можно рассмат-

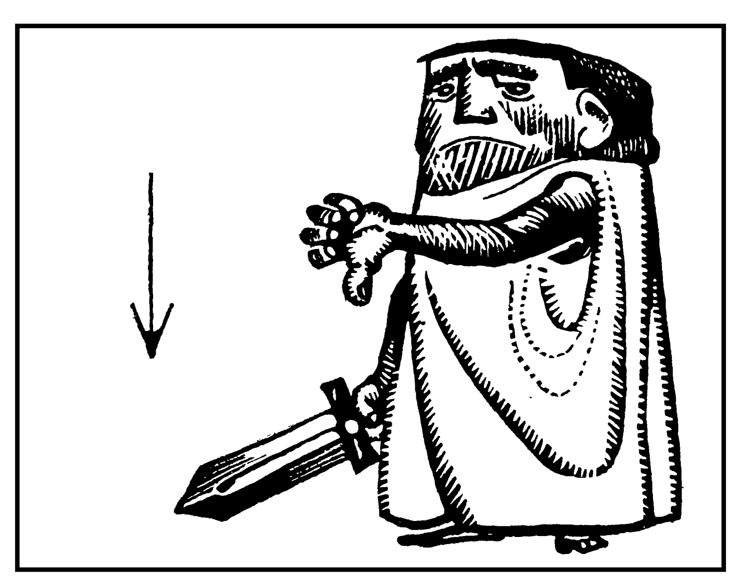
ривать как «идеальные» элементы логики. И поступать с ними следует так же, как со всяким идеальным элементом: их следует вводить, когда они оказываются необходимыми (а они оказываются очень даже необходимыми!), но при этом нужно основательно проверить, не противоречат ли они всей нашей старой системе правил Таким образом, перед нами стоит задача: проверить непротиворечивость сверхконечных методов.

Символическая логика

Чтобы достигнуть поставленной цели, Гильберт решил воспользоваться тем, что саму логику, применяемую в математике, — методы умозаключения и доказательства, — можно сделать объектом математических исследований. Первым условием при этом является очищение доказательств от всех случайностей, вызванных неточным обиходным способом выражения мыслей, и выделение свободной от неясностей, чистой формы.

Числа могли стать предметом точных исследований лишь потому, что речь шла не о пяти пальцах, не о пяти высказываниях, а именно о чистой форме, общей для всех этих вещей. Эта чистая форма была названа числом и стала обозначаться знаком «5». Если мы хотим сделать высказывания предметом наших исследований, то мы так же точно должны абстрагироваться от их конкретного содержания. В высказываниях «2·2=4», «через две точки всегда можно провести прямую линию», «снег белый» нас интересует лишь то, что в них содержится общего, — их истинность. Для обозначения этого факта можно ввести новый знак, например, ↑.

Общее логическое значение высказываний «2 · 2=5», «две прямые пересекаются в двух точках», «снег черный» состоит в том, что все эти высказывания — ложные. Это можно обозначить символом ↓.
(Так древние римляне указывали большим пальцем вверх или вниз — этим решалось, быть рабу помилованным или нет.)



В математике нас интересуют сейчас только те высказывания, которые принимают одно из этих логических значений (короче говоря — которые истинны или ложны).

Таким образом, возникает новое исчисление, которое оказывается даже проще исчисления натуральных чисел. Натуральных чисел бесконечно много, а здесь мы имеем дело только с двумя значениями. Поэтому мы очень легко можем выписать «таблицы умножения».

Поскольку речь идет об исчислении, то нам необходимы также логические действия, то есть такие связи отдельных высказываний, которыми мы пользуемся в математике на каждом шагу.

Математик, который не знает всех языков мира, может очень легко понять, о каких связях здесь идет речь. Достаточно взять математическую книгу на незнакомом языке и посмотреть, какие выражения мы должны искать в словаре в процессе чтения. И математик убедится с удивлением, что когда им хорошо будут усвоены слова «не», «и», «или», «если — то», «тогда, и только тогда», «все», «существует», «тот, который», то через некоторое время он вовсе перестанет замечать, что читает книгу на иностранном языке, потому что будет понимать все очень свободно. Ибо формулы международны, текст дает только объяснения и в большинстве случаев не является безусловно необходимым. А необходимые логические связи практически все содержатся в указанном нами списке:

Как выглядит, например, «таблица умножения» слова «не»? Она очень проста: отрицание истинного высказывания (например, «2·2 не равно 4») — очевидно, ложное высказывание; отрицание ложного высказывания (например, «2·2 не равно 5») — истинное высказывание, и вся таблица выглядит так:

$$\text{не} \uparrow = \downarrow,$$
$$\text{не} \downarrow = \uparrow.$$

Слово «не» можно коротко обозначить знаком $\neg$.

Поэтому, например,

$$\neg (2 \cdot 2 = 5)$$

является отрицанием высказывания $2 \cdot 2 = 5$. Применение этого обозначения придает таблице слова «не» вид

$$\neg\uparrow = \downarrow,$$
$$\neg\downarrow = \uparrow.$$

Легко можно написать также таблицу для той логической операции, которая выражается союзом «и». Если два истинных высказывания мы соединим союзом «и», то снова получим истинное высказывание, например, высказывание $2 \cdot 2 = 4$ и «через две точки можно провести прямую, и притом только одну» — истинное. И поэтому

$$\uparrow \text{ и } \uparrow = \uparrow.$$

Если, однако, хотя бы одно из высказываний, связанных союзом «и», ложно, то, как говорится, портится вся картина: $2 \cdot 2 = 4$ и $2 \cdot 3 = 7$ — это ложное высказывание не поможет, если даже другое высказывание истинно. Связь союзом «и» двух ложных высказываний тем более дает ложное высказывание. Так что таблицу слова «и» можно дописать до конца следующим образом:

$$\uparrow \text{ и } \downarrow = \downarrow,$$
$$\downarrow \text{ и } \uparrow = \downarrow,$$
$$\downarrow \text{ и } \downarrow = \downarrow.$$

Теперь мы исчерпали все возможности. Не правда ли, эта таблица в ее законченном виде куда легче таблицы умножения?

А таблица слова «или»? Сначала нам нужно выяснить, как следует понимать слово «или» — ведь в повседневной речи союз этот имеет различные значения.

Когда Гамлет задает свой знаменитый вопрос — «Быть или не быть?» — ему приходится в конце концов выбирать что-то одно. Принять обе позиции сразу невозможно — одна исключает другую.

«Если мы поделим Сахару пополам, то лев будет находиться в одной или в другой половине». Лев наверняка находится в какой-либо полу-Сахаре, но мо-

жет случиться и так, что он находится в обеих половинах сразу (когда лежит точно на границе):

«Или говоришь, или ешь». Оба действия взаимно исключают одно другое, но мы вовсе не должны непременно есть или говорить; ведь губами можно делать и что-либо другое, их можно и вовсе не открывать.

В математике слово «или» чаще всего используется в ином значении. Именно: высказывание с союзом «или» мы считаем истинным в том случае, если по крайней мере одно из составляющих его высказываний истинно, причем мы допускаем также, что оба высказывания могут быть одновременно истинными. Таким образом, мы исключаем только тот случай, когда оба высказывания ложные. Поэтому таблица операции «или» имеет вид:

$$\uparrow \text{ или } \uparrow = \uparrow,$$
$$\uparrow \text{ или } \downarrow = \uparrow,$$
$$\downarrow \text{ или } \uparrow = \uparrow,$$
$$\downarrow \text{ или } \downarrow = \downarrow.$$

Имея таблицу, мы можем теперь считать ее определением логической операции «или» и тем самым освободиться от языковых недоразумений: союз «или» можно теперь понимать только в одном смысле. «Или» в ином смысле также удается точно сформулировать при помощи нашего «или».

Ясно, что здесь также имеются «правила исчисления». Например, как в случае операции «и», так и в случае операции «или» можно изменять последовательность обоих высказываний — точно так же, как порядок сомножителей в произведении.

Я не собираюсь подробно останавливаться на этом вопросе — хотя это было бы достаточно просто — уже потому, что в нашем распоряжении только два логических значения — истинно и ложно, а это чрезвычайно упрощает рассуждения.

Будет очень полезно, если мы рассмотрим пример «счета». Вспомним, что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, и таким образом удается свести умножение

к сложению. Нет ли подобной зависимости в случае логических операций?

Возьмем пример из области столь модных детективных романов. Попробуем установить истину, исходя из следующих фактов. Произошло убийство, подозреваются двое — Петр и Павел.

В процессе по делу об убийстве выступают перед судом четыре свидетеля. Первый свидетель сказал:



— Я знаю только то, что Петр невиновен.

Второй свидетель показал:

— Я знаю, что Павел наверняка невиновен.

Третий свидетель утверждал:

— Я знаю, что по крайней мере одно из предыдущих показаний было истинным.

Показания четвертого свидетеля гласили:

— С полной уверенностью я могу подтвердить, что третий свидетель сказал неправду.

Ход процесса подтвердил, что четвертый свидетель был прав. Кто же был преступником?

Проанализируем показания свидетелей, двигаясь

последовательно в обратном порядке. Четвертое высказывание оказалось истинным, то есть слова третьего свидетеля были ложью. Иначе говоря, неправда, что по крайней мере одно из двух первых высказываний было истинным. Поэтому ни одно из этих двух высказываний не может быть правдой — как то, которое утверждает невиновность Петра, так и то, которое говорит о невиновности Павла. Отсюда следует, что оба — соучастники преступления, оба — убийцы.

Попробуем теперь выделить логическое ядро наших рассуждений.

Логические значения высказываний мы будем рассматривать как неизвестные величины — ведь мы не знали с самого начала, являются ли высказывания истинными. Обозначим логические значения показаний первых двух свидетелей через x и y. Третий свидетель сказал, что по крайней мере одно из этих высказываний истинно, то есть (поскольку наша операция «или» точно выражает именно это «по крайней мере») что

$$x \text{ или } y \text{ —}$$

истинное высказывание. Четвертый свидетель отрицал это; знаком отрицания является символ «$\neg$»; поэтому согласно показаниям четвертого свидетеля истинным является высказывание

$$\neg (x \text{ или } y).$$

Поразмыслив немного, мы приходим к выводу, что это последнее высказывание выражает в точности ту мысль, что истинными являются отрицание первого высказывания и отрицание второго высказывания, то есть то

$$\neg x \text{ и } \neg y.$$

Таким образом, независимо от того, истинны x и y или нет, высказывание

$$\neg (x \text{ или } y)$$

равноценно высказыванию

$$\neg x \text{ и } \neg y.$$

От союза «или», как видим, можно перейти к союзу «и» и наоборот.

Очевидно, общий путь к нахождению такого ро-

да зависимостей не связан с анекдотами. Историю об убийстве мы вспомнили для большей наглядности, и только. Логические связи можно проверять совершенно механически, подставляя вместо x и y возможные значения $\uparrow$ и $\downarrow$ и проверяя затем, дают ли оба интересующих нас высказывания один и тот же результат. Нам нужно проверить четыре возможных случая:

1. Как x, так и y имеют значение $\uparrow$.

2. x имеет значение $\uparrow$, в то время как y имеет значение $\downarrow$.

3. x имеет значение $\downarrow$, в то время как y имеет значение $\uparrow$.

4. Как x, так и y имеют значение $\downarrow$.

Рассмотрим первую возможность. Что дает высказывание $\neg(x$ или $y)$,
если как x, так и y имеют значение $\uparrow$? Из таблицы слова «или» следует, что (здесь незачем размышлять, достаточно просто заглянуть в таблицу)

$$\uparrow \text{ или } \uparrow = \uparrow,$$

то есть в этом случае

$$x \text{ или } y = \uparrow,$$

и мы имеем дело с высказыванием

$$\neg\uparrow;$$

из таблицы слова «не» мы тотчас находим, что значение этого высказывания — $\downarrow$.

А каково будет значение высказывания

$$\neg x \text{ и } \neg y,$$

когда и x и y имеют значение $\uparrow$? Тогда

$$\neg x = \neg\uparrow = \downarrow,$$

а

$$\neg y = \neg\uparrow = \downarrow,$$

и мы, следовательно, имеем дело с высказыванием

$$\downarrow \text{ и } \downarrow,$$

которое — по таблице слова «и» — имеет значение $\downarrow$. Точно так же можно показать, что в трех остальных случаях оба рассматриваемых нами высказывания имеют одно и то же значение.

Здесь можно воспользоваться также и алгеброй; я придумываю какое-нибудь высказывание, применяю

к нему различные логические операции, затем сообщаю, истинное или ложное высказывание у меня получилось в итоге, и прошу отгадать, истинным или ложным было первоначально задуманное мною высказывание. В частности, большой интерес представляет игра такого рода:

Задумайте какое-нибудь высказывание и соедините его с его отрицанием союзом «или»; вы можете мне ничего не говорить — независимо от этого я могу вам сказать, что полученное вами высказывание наверняка истинное.

Это можно записать следующим образом: задуманное высказывание обозначаем x, его отрицанием будет высказывание $\rceil x$; связывая оба эти высказывания союзом «или», мы получаем

$$x \text{ или } y.$$

Утверждается, что логическое значение этого последнего высказывания всегда равно $\uparrow$, независимо от того, какое значение у x, $\uparrow$ или же $\downarrow$. Убедимся в этом.

Если у x значение $\uparrow$, то по таблице слова «не»

$$\rceil x = \rceil \uparrow = \downarrow,$$

и мы имеем дело с высказыванием

$$\uparrow \text{ или } \downarrow.$$

Посмотрите в таблицу слова «или», и вы убедитесь, что это высказывание действительно имеет значение $\uparrow$.

Если же x имеет значение $\downarrow$, то по таблице слова «не»

$$\rceil x = \rceil \downarrow = \uparrow,$$

и речь, следовательно, идет о высказывании

$$\downarrow \text{ или } \uparrow.$$

Из таблицы слова «или» снова получаем значение $\uparrow$.

Таким образом, мы обнаружили очень любопытный факт: существуют какие-то соединения высказываний, которые всегда истинны, независимо от входящих в эти соединения отдельных высказываний. Истинность таких соединений не зависит не только от содержания, но и от логического значения высказываний — составляющих. Их истинность вытекает из самой логической структуры; мы их назовем тавтологиями, или же логическими тождествами. И именно

такие высказывания играют основную роль в математике.

Можно было бы продолжать развлекаться — предположить, например, что не известен только предмет, а не все высказывание. Например: «Я задумываю какое-то число и утверждаю, что оно четное. К этому высказыванию я буду применять различные операции». Высказывание можно записать так:

«x есть четное число».

Истинность или ложность этого высказывания зависят, очевидно, от того, чему равняется x. Если, например, $x=4$, то высказывание истинно; если же $x=7$, то высказывание ложно. И мы имеем дело с высказыванием, значение которого является функцией от x; в связи с этим мы приходим к теории логических функций.

Мы можем легко построить также логическую функцию нескольких переменных. «Я задумываю три точки и утверждаю, что они лежат на одной прямой». Это высказывание можно записать так:

«x, y и z лежат на одной прямой».

Его значение зависит от выбора точек x, y и z. Если три точки расположены так:

● x ● y ● z,

то высказывание истинно; если же точки расположены так:



то высказывание ложно.

Нельзя сразу не заметить того, что неизвестные здесь не могут быть выбраны произвольно. В нашем первом примере x следует выбирать среди натуральных чисел, а во втором примере x, y и z являются точками плоскости. Мы уже сталкивались с подобными вещами в случае математических функций. Там также нужно было оговорить специально, из какого множества выбираются неизвестные. Это множество в случае логических функций мы называем «областью индивидуумов» данной функции.

А теперь — именно в связи с логическими функциями — настала пора появиться «опасностям», «опасным операциям». Одной из них является, например, слово «каждый». Если мы применим его к первой логической функции, то получим:

«каждое x является четным числом»

(очевидно, не нужно особо оговаривать, что мы имеем в виду: каждое x, взятое из множества натуральных чисел); это также высказывание, но высказывание ложное, потому что можно привести контрпример, хотя бы число 5, которое не является четным. И таким образом, «каждое x является четным числом» = $\downarrow$. Если же мы применим к нашей функции слово «существует», то полученное высказывание

«существует x, которое является четным числом»

будет истинным высказыванием, то есть

«существует x, которое является четным числом» = $\uparrow$. Мы видим, что слова «каждый» и «существует» также обозначают логические операции, которые можно применять к логическим функциям и которые дают в итоге высказывания, имеющие определенное логическое значение.

В нашем примере значение высказывания, начинающегося словом «каждый», равно $\downarrow$ и поэтому является совершенно однозначным (независимо от x). А значение высказывания, начинающегося словом «существует», совершенно однозначно равно $\uparrow$.

Эти новые операции, однако, вводят в логику бесконечный фактор. Мы утверждаем: «что-то имеет место для каждого элемента из области индивидуумов». Если область индивидуумов бесконечна (как, например, множество натуральных чисел или множество точек плоскости), то мы ведем себя по отношению к бесконечности так, как если бы она находилась у нас в руках в готовом и законченном виде.

Мы говорим: «существуют такие x в бесконечной области индивидуумов», как если бы мы могли обойти всю бесконечную область, чтобы отыскать это самое x.

С помощью слова «каждый» мы формулируем высказывания, относящиеся к «актуальной бесконечности». Слово же «существует» дает «чистое высказывание существования», то есть утверждение о существовании предметов, которые нельзя указать. Таким образом, в логике появляются идеальные элементы, которые могут претендовать на право гражданства лишь после того, как доказано отсутствие в них противоречий.

Высказывания теории логических функций можно, очевидно, формулировать способом столь же точным, как, например, мы формулируем тавтологию:

$$x \text{ или } \neg x$$

Чтобы на чисто логические высказывания не падала тень многозначности повседневной речи, лучше вместо употреблявшихся до сих пор слов ввести знаки — так, как мы это уже сделали со словом «не».

Так именно и пишутся работы, в которых рассматриваются проблемы символической логики. Работы эти написаны действительно международным языком: на многих их страницах можно вовсе не найти ни одного слова, только ряды знаков. Специалист читает по ним текст подобно тому, как музыкант считывает с нотного листа мелодию.

Уже Лейбниц начал строить чистый, лишенный многозначности язык формул; многие ученые развивали и совершенствовали этот язык, и, наконец, Гильберт со своим сотрудником Бернайсом превратил этот язык в гибкий и чувствительный инструмент, позволяющий до такой степени точно формулировать используемые в математике методы доказательства, что сами эти методы смогли стать предметом математического исследования.

21. Перед трибуналом сверхматематики

Пришло время взять строго ограниченную ветвь математики и посмотреть, не могут ли там объявиться противоречия.

Мы уже знаем, каким способом достигается такое ограничение. Выбирем исходные условия, или аксиомы, и положим, что вся отрасль науки складывается из того, что может быть выведено из данных аксиом.

Теория доказательства

Аксиомы можно записать на языке символической логики; в таком случае они будут состоять только из последовательности математических и логических знаков, без использования какого-либо слова, способного вызывать недоразумения.

Нужно также четко установить, что значит «нечто можно вывести из аксиом», то есть нужно четко сформулировать п р а в и л а в ы в о д а.

Если из истинности какого-то высказывания мы делаем вывод об истинности другого высказывания и если этот вывод мы записываем в нашей символике, то тем самым все наши исследования сводятся к изучению переходов от одной последовательности знаков к другой. Вспомним, как мы обычно решаем уравнения, — ход решения складывается из таких же шагов. Например, от последовательности знаков

$$\frac{5x}{2} + 3 = 18$$

мы переходим к последовательности знаков

$$\frac{5x}{2} = 15.$$

Право на такой переход мы получили после простого рассуждения: если какая-то величина с прибавлением к ней 3 дает в результате 18, то сама эта величина должна быть равна 15.

Однако потом мы убедились, что обе последовательности знаков разнятся чисто ф о р м а л ь н о только тем, что слева в первой последовательности имеется знак 3, отсутствующий в другой последовательности, в то время как число, находящееся справа во второй последовательности, на 3 меньше числа из первой последовательности. Поэтому мы могли при-

нять чисто *формальное* правило, согласно которому можно переносить слагаемое из одной стороны уравнения в другую сторону в качестве вычитаемого. Приняв это правило, мы пользуемся им затем, уже не вникая в его смысл. Таким образом, сознательно введенное правило вывода превращается в механическое «правило игры»: некоторые знаки можно переносить, сделав предварительно те или иные изменения, с одного места на другое. Это напоминает игру в шахматы: шахматного короля можно передвигать на одну клетку в любом направлении.

Точно так же мы можем поступать при получении выводов из наших аксиом: выявляем, какое *формальное* изменение в нашей последовательности знаков соответствует данному умозаключению, и затем осуществляем это формальное изменение, не останавливаясь каждый раз подробно на внутреннем содержании этого изменения.

Теперь мы уже можем напрочь забыть, о чем идет речь в данной области науки, и можем сказать: мы располагаем определенными, ничего не значащими последовательностями знаков (их мы называем аксиомами) и определенными правилами игры, которые устанавливают, к какой иной последовательности знаков можно перейти от данной последовательности. Правила эти мы называем правилами умозаключения.

Итак, системы высказываний и доказательств превращаются в руках математика в материал, столь же послушный и гибкий, как, например, числа. При таком подходе к теории мы можем пользоваться испытанными методами математического исследования.

Но эти методы уже нельзя использовать механически, следуя установленным правилам игры. На каждом шагу нужно безусловно убедиться в том, что шаг этот, бесспорно, допустим и не вводит в наши рассуждения опасных элементов. Ни на минуту нельзя терять из виду основной цели: мы хотим показать, что в данной отрасли науки позволительно пользоваться бесконечными элементами; такое доказательство не имело бы ровно никакой убедительности, если бы оно велось с использованием опасных элементов.

Средства доказательства должны быть столь безупречны, чтобы даже самый критически настроенный интуиционист не мог под них подкопаться.

Математика

Итак, математика как бы раскалывается, расщепляется: с одной стороны, мы имеем полностью формализованные системы с формальными предписаниями игры вместо правил умозаключения; с другой стороны, мы имеем сверхматематику, в которой тщательно исследуется смысл каждого шага и где мы пользуемся лишь абсолютно безупречными, безопасными умозаключениями. Это так называемая метаматематика. Она рассматривает системы, формализованные как бы извне, и главной ее задачей является доказательство непротиворечивости данной теории.

Казалось бы, что если мы хотим выяснить, не приводит ли использование наших правил игры к противоречию, то мы должны анализировать содержание высказываний. Можно было бы рассудить, что от содержания, а не от формы высказывания зависит, содержит ли оно противоречие.

Мы можем избавиться от этих опасений, заметив, что достаточно ограничиться одним только противоречием; скажем, если натуральные числа входят в состав системы, следующим:

$$1=2.$$

Эту простую последовательность знаков можно полностью охарактеризовать, исходя из ее структуры: принимаем во внимание, что появление после цифры 1 знака «=» и цифры 2 означает противоречие. Ничего больше нам не нужно. Уже шла речь о том, что существуют шутливые рассуждения, позволяющие провести доказательство равенства $1=2$, и тогда же говорилось, что из каждого противоречивого высказывания, которое прокрадывается в умозаключение, можно вывести все, даже $1=2$. Поэтому достаточно показать, что в данной системе нельзя вывести формулу $1=2$. Показав это, мы можем быть уверены, что в теорию нашу не проникли никакие противоречия.

Поэтому точно сформулированные высказывания метаматематики основываются на доказательстве того, что нельзя, исходя из последовательностей знаков, называемых аксиомами, и используя установленные правила игры, перейти к последовательности знаков вида 1=2.

На нескольких простых примерах Гильберт сам дал образцы таких доказательств непротиворечивости. Впоследствии его школа распространила эти методы на более сложные системы. Так постепенно накапливались средства, необходимые исследования какой-то большой, широкой области науки. Прежде всего, естественно, возникает мысль о науке о натуральных числах, или арифметике. Все говорило за то, что необходимо лишь небольшое усилие, чтобы распространить идеи гильбертовского доказательства на всю арифметику вместе со всеми заключенными в ней скользкими местами и опасными понятиями.

И вдруг «теория доказательств» Гильберта, эта новая отрасль науки, которую выстраивали столь изящно, с такой осмотрительностью, — вдруг эта теория испытала серьезное потрясение.

Доказательство непротиворечивости арифметики

Молодой венский математик Гедель обнаружил — пользуясь при этом именно методами теории доказательства (каким образом применял он эту теорию, мы поговорим в заключительном разделе книги), — что нельзя доказать непротиворечивость арифметики, если пользоваться при этом только теми средствами, которые можно формально описать в рамках рассматриваемой системы.

Постараемся это хорошо понять: метаматематика не применяет формальных средств; она должна всегда хорошо знать, что делает. Ее умозаключения должны быть сознательными, а не механическими. Но это тем не менее не означает, что мы не могли бы использовать метаматематические умозаключения в механических правилах игры. Очевидно, мы могли бы это сделать, если бы мы хотели поиграть метама-

тематикой независимо от ее собственной цели. Если бы мы формализовали метаматематику, то — как, кажется, само собой разумеется — ее осторожные, избегающие всевозможных опасных элементов методы умозаключения должны позволить формализовать себя в рамках уже много более узких, нежели рассматриваемая теория с ее бесконечными элементами. И в то же время результат Геделя утверждает, что доказательство непротиворечивости можно провести только такими средствами, которые выводят нас за пределы рассматриваемой системы.

Кто же, однако, может счесть утешительным оправдание опасных элементов, если это оправдание достигается средствами, почерпнутыми из еще более обширного арсенала, нежели средства, используемые в исследуемой системе?

Казалось бы, что это открытие знаменует собой окончательный крах теории доказательства и что нет уже никакой надежды на спасение.

Однако Гильберт ни на минуту не поддался панике. Он был уверен, что должен найтись какой-то выход. Должны существовать какие-то способы умозаключения, которые выходят за пределы рассматриваемой системы и, несмотря на это, опираются на конкретные основы нашего конечного разума, так что могут быть приняты также и интуиционистами.

Поиски таких методов ведения доказательства увенчались в конце концов успехом. Ученик Гильберта Гентцен нашел соответствующий инструмент для метаматематики. Инструментом этим оказался некоторый случай так называемой бесконечной индукции. Таким образом была доказана непротиворечивость всей арифметики.

Стадо натуральных чисел может пастись спокойно. Волков среди них нет.

«Бесконечная индукция» — это звучит весьма грозно: однако речь здесь идет о следующей — самой безобидной — мысли.

Если, исходя из произвольно удаленного члена натурального ряда чисел

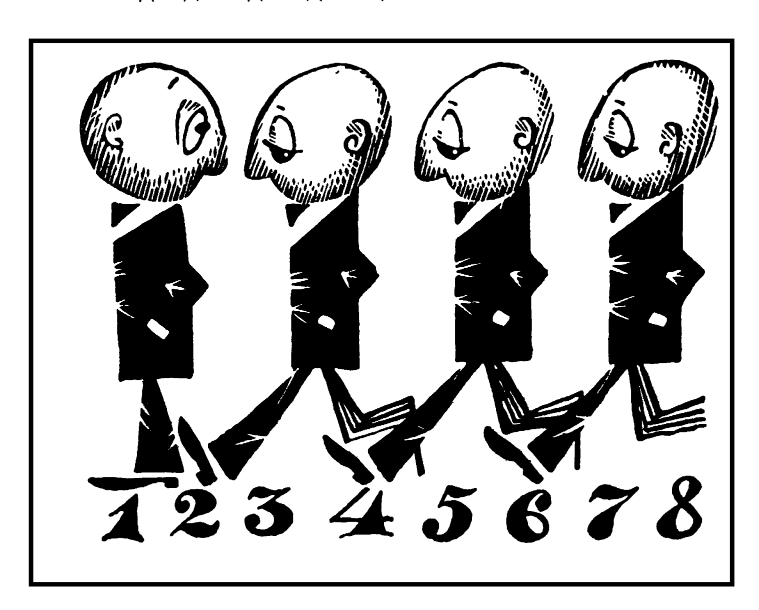
$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

мы начнем двигаться назад, делая при этом шаги произвольной величины, то наверняка сможем сделать только ограниченное число шагов. Если бы мы начали от одного миллиона и продвигались бы при каждом шаге назад всего лишь на одну единицу — все равно, сделав один миллион шагов, мы остановимся на числе 1.

Упорядочим теперь натуральный ряд чисел, например, так: сначала берем все нечетные числа, а затем, «исчерпав» всю бесконечную совокупность нечетных, обращаемся к четным числам:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ .$$

Если при таком упорядочении мы будем двигаться от какого-либо числа назад, то есть налево, то, сделав какое-то число шагов, мы рано или поздно закончим наш путь. Ибо если мы начнем с нечетных чисел, то — подобно тому, как это уже имело место в случае натурального ряда, — после конечного числа шагов мы дойдем до единицы. Если же мы начнем



с четного числа, то тем же самым способом легко обнаружить, что после более или менее значительного числа шагов нам не хватит четных чисел, и тогда нам придется переходить к нечетному числу, как бы велико оно ни было. Тем самым мы уже будем двигаться в пределах одной последовательности, построенной так же, как уже исследованный нами натуральный ряд.

Натуральный ряд, очевидно, можно упорядочить самыми разными способами, произвольно увеличивая при этом сложность.

Например, можно разделить натуральный ряд на группы, выписывая вначале числа, делящиеся на 3; затем числа, превышающие их на 1; затем числа, больше их на 2 (для порядка добавляем еще число 0):

$$0, 3, 6, 9, \ldots 1, 4, 7, 10, \ldots 2, 5, 8, 11, \ldots .$$

Если мы двинемся назад, начиная с какого-либо числа третьей группы, то, сделав конечное число шагов, мы придем во вторую группу, и тогда положение окажется совершенно сходным с тем, что было уже в предыдущем, рассмотренном нами примере.

Мы можем также получить бесконечное число групп, например, если отнесем к первой группе нечетные числа; ко второй группе — числа, делящиеся только на первую степень 2; к третьей — числа, делящиеся на $2^2=4$; к четвертой — числа, делящиеся на $2^3=8$; и т. д.:

$$1, 3, 5, 7, \ldots 2, 6, 10, 14, \ldots 4, 12, 20, 28, \ldots$$
$$8, 24, 40, 56, \ldots .$$

Тот факт, что появляется бесконечное число групп, не должен нас пугать: если мы примем за исходную точку какое-то определенное число, то число это будет находиться в одной из групп и перед этой группой будет расположено только конечное число других групп.

Из всех этих примеров ясно, что, двигаясь назад, мы переходим от образований более сложных к менее сложным. Одновременно оказывается, что после

конечного числа шагов мы должны прийти к обычному натуральному ряду — если только мы исходим из какого-то сложного упорядочения натуральных чисел и двигаемся вспять.

Так вот, Гентцен в своем доказательстве воспользовался тем фактом, что при определенном упорядочении (которое несравненно более сложно, нежели рассматриваемые нами примеры) также можно сделать лишь конечное число шагов назад. Этот факт мы можем без труда «переварить» в нашем конечном и конкретном сознании, и в то же время факт этот выходит за пределы рассматриваемой системы.

Каким образом можно использовать этот результат при доказательстве непротиворечивости?

Ход мысли при доказательстве непротиворечивости всегда таков. Допустим, что кто-то утверждает, что ему удалось вывести противоречивое утверждение, исходя из аксиом системы. Этот некто представляет нам доказательство, которое начинается аксиомами, основывается якобы только на принятых правилах умозаключения и заканчивается формулой $1=2$. Мы же хотим показать, что доказательство это содержит ошибку, и собираемся отыскать ее.

Если в представленном на наш суд доказательстве нет никакого опасного элемента, то очевидно, что мы можем найти ошибку. Исходя из истинных утверждений и опираясь на бесспорные правила умозаключения, можно прийти к ложному выводу $1=2$ только тогда, когда по ходу дела совершается какая-то ошибка.

Если же в доказательстве выступает какой-то бесконечный элемент, то мы уже не можем быть уверенными, что сумеем найти ошибку. Ибо именно в бесконечном элементе и может сидеть источник противоречия.

Но вывод, полученный в результате проведенного доказательства, выглядит очень скромно: $1=2$. Здесь нет и следа какого-то сверхконечного понятия. Если подобное понятие и выступало в процессе доказательства, то лишь таким образом, что (в соответствии со свойствами идеальных элементов) появилось в какой-

то момент, сыграло свою роль и затем вновь исчезло. Нельзя ли провести доказательства без его помощи?

Многие тригонометрические формулы, например, удается вывести как с помощью мнимой единицы i, так и без использования ее.

Если мы имеем дело только с одним опасным элементом или если несколько опасных элементов появляются независимо друг от друга, то действительно возможность эта у нас есть. Гильберт показал, что доказательства такого рода удается преобразовать в доказательства совершенно безопасные, в которых быстро можно обнаружить ошибку.

Однако идеальные элементы, будучи бестелесными, фантастическими существами, способны взаимно оплетать друг друга, появляться в чрезвычайно сложных соединениях и связях. Из очень запутанных доказательств нельзя уже устранить бесконечные элементы столь простым способом.

Тем более интересным оказывается открытие Гентцена, который заметил, что существует аналогия между степенью сложности доказательства и сложными упорядочениями множества натуральных чисел. Если к такому сложному доказательству мы применим метод Гильберта, то хотя и не устраним бесконечные элементы, тем не менее получим доказательство, степень сложности которого соответствует менее сложному упорядочению множества натуральных чисел. То же самое получится, когда мы применим метод Гильберта еще раз — уже к менее сложному доказательству. Таким образом, переходя ко все менее сложным упорядочениям множества натуральных чисел, мы в конце концов — сделав конечное число шагов — придем к последовательности без каких бы то ни было усложнений. Поэтому, используя конечное число раз идею Гильберта, мы получаем доказательство, лишенное всяких сложностей, доказательство, в котором не будет уже бесконечных элементов и в котором мы без труда отыщем ошибку.

Это очень изящное, чисто математическое рассуждение, а полученный нами результат имеет огром-

ное значение. Мы восстановили доверие к правильности старых методов, по крайней мере в арифметике.

Многие математики — из тех, кто и слышать не хочет об опасности, — относятся, несмотря ни на что, к теории доказательства недоброжелательно, считая ее скорее философией, нежели математикой. Они признают смысл существования новой области математики только тогда, когда новую теорию можно применить с пользой в других областях математики. Чтобы показать возможности, таящиеся в теории доказательства, Гильберт подал идею применить методы этой теории к самой грандиозной из старых проблем теории множества, так называемой гипотезе континуума.

Гипотеза континуума

Речь здесь идет о следующей проблеме. В области натуральных чисел, упорядоченных в соответствии с их значением, господствует абсолютный порядок. Для каждого числа существует число, непосредственно за ним следующее: за 3 следует 4, за 12 следует 13. В области дробей положение иное. В любой окрестности данной дроби всегда можно найти другие дроби. Явление это выступает еще рельефней, если мы рассмотрим все действительные числа. Они расположены на числовой прямой непрерывно и так, что словно сливаются друг с другом. Именно поэтому мощность множества действительных чисел мы и называем мощностью континуума (слово «континуум» обозначает непрерывную протяженность).

В области введенных Кантором бесконечных мощностей можно также поставить вопрос: существует ли для каждой мощности мощность, непосредственно за ней следующая? Ответ утвердительный. С этой точки зрения бесконечные мощности ведут себя так же, как и натуральные числа. Наименьшей бесконечной мощностью является мощность множества натуральных чисел. Напрашивается вопрос: какая мощность следует непосредственно за ней?

Мы знаем, что мощность континуума, то есть мощность множества действительных чисел, превышает мощность множества натуральных чисел. Однако нужно еще выяснить, следуют ли они непосредственно одна за другой или между ними находятся другие мощности. Было проведено много глубоких исследований этой проблемы. Постепенно среди математиков распространилось предположение, что мощность континуума следует непосредственно за мощностью множества натуральных чисел. Это предположение и составляет ту проблему, которую мы выше назвали «гипотезой континуума», те, кто твердо верит в справедливость этого утверждения, называют его также «теоремой о континууме». Долгое время, однако, не удавалось разрешить эту проблему.

Впоследствии Гедель, опираясь на идеи Гильберта, показал, пользуясь методами теории доказательства, что, принимая истинность гипотезы континуума, мы не введем никаких противоречий в теорию множеств. Таким образом, гипотеза эта либо не зависит от аксиом теории множеств, либо может быть выведена на основании этих аксиом — в любом случае мы имеем право пользоваться ею в наших доказательствах, поскольку она не приведет ни к какому противоречию. Метод доказательства здесь похож на метод доказательства непротиворечивости гиперболической геометрии. Гедель построил модель теории множеств. В этой модели одновременно выполняются и аксиомы теории множеств и гипотеза континуума.

Теперь Гильберт имел бы уже полное право сказать сомневающимся в теории доказательства: «По их плодам познаете вы их».

Добавление о представлении, обращенном в бесконечность

Итак, непротиворечивость науки о натуральных числах незыблема. Найденное доказательство легко можно преобразовать в доказательство непротиво-

речивости науки о других перечислимых множествах — о положительных и отрицательных целых числах, о дробях или же вообще о рациональных числах.

Остается еще рассмотреть множество действительных чисел, и здесь мы сталкиваемся с новыми трудностями.

Иррациональные числа мы получаем с помощью улучшающихся приближений, заключая их во все более тесные пределы. Таким образом, мы имеем здесь дело не с арифметикой, а с анализом. Бесконечные процессы встречаются здесь уже постоянно, поэтому появляются опасные элементы нового вида.

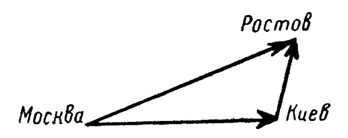
Аксиоматизация анализа

Когда мы впервые столкнулись с этими вопросами в нашей книжке, мы долго размышляли, как бы нам поточнее сформулировать чреватое необычайными опасностями высказывание анализа, от которого зависит само существование анализа. Это высказывание гласило: «Наше представление показывает, что при неограниченном образовании сходящихся пределов, когда каждый последующий предел заключен внутри предыдущих, должно существовать нечто такое, к чему они сходятся, какая-то их общая часть».

Каким же, однако, образом представление может давать указания, относящиеся к этому бесконечному процессу? Или мы забыли, что нельзя распространять на бесконечность наблюдения, почерпнутые из конечного мира?

Можно привести новый пример, который не может не заставить всерьез задуматься.

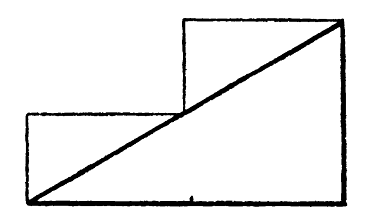
Не нужно быть математиком, чтобы заметить, что кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия. Если кто-то летит, например, из Москвы в Ростов, то гораздо быстрее можно добраться до цели, выбрав прямую дорогу, чем делая крюк и залетая в Киев:



Отсюда можно сделать вывод, что длина суммы двух сторон треугольника больше длины третьей стороны.

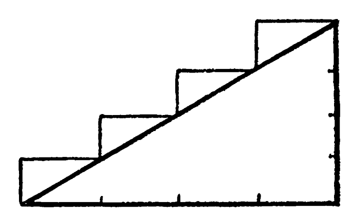
А теперь «докажем» вопреки всему и вся, что два катета прямоугольного треугольника дают в сумме длину гипотенузы. Это очевидная нелепость; и, однако, именно такой вывод нам сейчас подскажет представление, использованное применительно к неограниченным процессам.

Нарисуем на гипотенузе с помощью отрезков, параллельных катетам, лесенку:

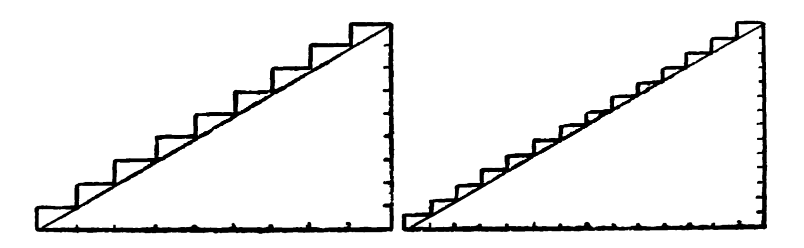


Ясно, что длина двух вертикальных отрезков равна длине вертикального катета, а длина двух горизонтальных отрезков дает длину горизонтального катета. Поэтому длина всей ступенчатой линии равна сумме длин катетов.

То же самое получится, если мы нарисуем лесенку, состоящую из четырех ступеней:



Снова горизонтальные отрезки в совокупности дают длину горизонтального катета, а вертикальные — вертикального катета. Если мы будем с каждым разом



увеличивать число ступенек, то и в дальнейшем окажется, что длина ступенчатой линии равна сумме длин двух катетов. С другой стороны, ступенчатая линия будет все более приближаться к гипотенузе треугольника, и «наша интуиция нам подсказывает», что, когда число ступенек будет неограниченно возрастать, лесенка сольется с гипотенузой. Отсюда следовало бы, что длина гипотенузы равна сумме длин двух катетов.

Теперь мы можем задуматься над тем, имеем ли мы право давать слово нашим представлениям при исследовании бесконечности.

А ведь речь идет о том, быть или не быть анализу. Или мы верим в него без какого бы то ни было обоснования, попросту потому, что хотим в него верить, или нам не остается ничего иного, как искать спасения в методах теории доказательств и исследовать, не может ли принятие такого утверждения привести к противоречию.

Итак, в системе аксиом анализа появляются новые бесконечные элементы. Если мы согласимся принять их, то система станет уже настолько широкой, что в ней могут быть представлены средства, использованные Генценом, и даже еще более сложные примеры бесконечной индукции. Именно здесь и звучит с особой отчетливостью теорема Геделя: непро-

тиворечивость системы нельзя доказать при помощи средств, которые удается формализовать в рассматриваемой системе. Поэтому нечего питать надежду на то, что старые методы окажутся достаточными для доказательства непротиворечивости анализа. Здесь нужно отыскивать новые средства, более сложные. И сегодня это — открытое поле для исследований.

22. Чего не может математика

Доказательство непротиворечивости арифметики, помимо всего прочего, показало нам недостатки аксиоматизации. Используемая в этом доказательстве бесконечная индукция является методом, который можно сформулировать на языке натуральных чисел и который легко можно себе представить «конечным» воображением. В то же время, однако, метод этот заставляет выходить за пределы системы аксиом, охватывающей науку о натуральных числах.

Это вовсе не исключительный случай. Никакая система аксиом не в состоянии охватить полностью того, что она хотела бы охватить. Всегда существуют вещи, которые выскальзывают из этой системы; с другой стороны, существуют вещи, которые без приглашения входят в эту систему. Система аксиом как бы хватается сразу за многое и оттого неизбежно должна что-то потерять.

То, что система аксиом хватается сразу за многое, было доказано норвежским математиком Сколемом.

Если мы хотим охватить нашей системой аксиом только натуральный ряд чисел с его обычной упорядоченностью, то в систему аксиом неизбежно проникнут также и другие, более сложные упорядочения этой числовой последовательности, и отгородить от них наше исходное, «естественное» упорядочение никак невозможно.

Если мы хотим ограничить системой аксиом область индивидуумов, большую, чем перечислимая, например, множество действительных чисел, то всегда



будет существовать также перечислимое множество, которое объявляется незванно и удовлетворяет условиям всех аксиом.

Неразрешенные проблемы и задачи, которые невозможно решить определенными средствами

То, что системы аксиом всегда должны что-то терять, было выявлено неожиданным открытием Геделя. Оказалось, что в каждой достаточно содержательной аксиоматической системе, включающей арифметику натуральных чисел, существуют неразрешимые проблемы.

Что это значит?

В математике существует много старых проблем, не решенных — частично или полностью — до сего дня. О некоторых мы уже говорили — как, например, о проблеме существования бесконечного множества пар-близнецов простых чисел (таких, как 11 и 13 или 29 и 31). Другой не разрешенной до конца проблемой является так называемая гипотеза Гольдбаха.

Вот в чем она заключается.

Замечено, что

$$4=2+2;$$
$$6=3+3;$$
$$8=3+5;$$
$$10=3+7=5+5;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

создается впечатление, что каждое четное число, за исключением 2, может быть записано в виде суммы двух простых чисел, иногда даже несколькими способами. Это оказалось верным для всех исследованных чисел. Однако предположение, что это выполняется для всякого произвольно большого четного числа, до сих пор не было ни доказано, ни опровергнуто.

Знаменитейшей из неразрешенных проблем является гипотеза Ферма (называемая также «большой теоремой Ферма»). Речь в ней идет вот о чем. Мы знаем, что

$$3^2+4^2=9+16=25=5^2,$$

то есть

$$3^2+4^2=5^2.$$

Существуют также другие примеры троек чисел, которые ведут себя таким образом, что если мы два из них возведем в квадрат и сложим, то получим в результате квадрат третьего числа.

Французский математик Ферма, читая книгу, написал на ее полях, что им найдено доказательство того, что такое положение невозможно для степеней, превышающих вторую, но, чтобы записать доказательство, у него не хватило места. Таким образом, Ферма высказал утверждение, что не может существовать трех целых чисел — x, y и z, которые удовлетворяли бы условию

$$x^3+y^3=z^3,$$

или

$$x^4+y^4=z^4,$$

или

$$x^5+y^5=z^5$$

и т. д.

Ферма умер уже очень давно. Многие математики пытались отыскать его доказательство, но никому из них не повезло. Эти безуспешные попытки отыскания доказательства, которое Ферма как будто уже держал в руках, вызвали огромный интерес к проблеме, самой по себе не столь уж интересной. В одном завещании была даже выделена солидная сумма в награду тому, кто разрешит эту проблему. Легко себе представить, что задача с большой наградой еще сильней возбуждала фантазию профанов, нежели квадратура круга. К счастью, пыл хватающихся не за свое дело людей сейчас уже несколько поостыл, потому что оставленное наследство после нескольких инфляций полностью обесценилось.

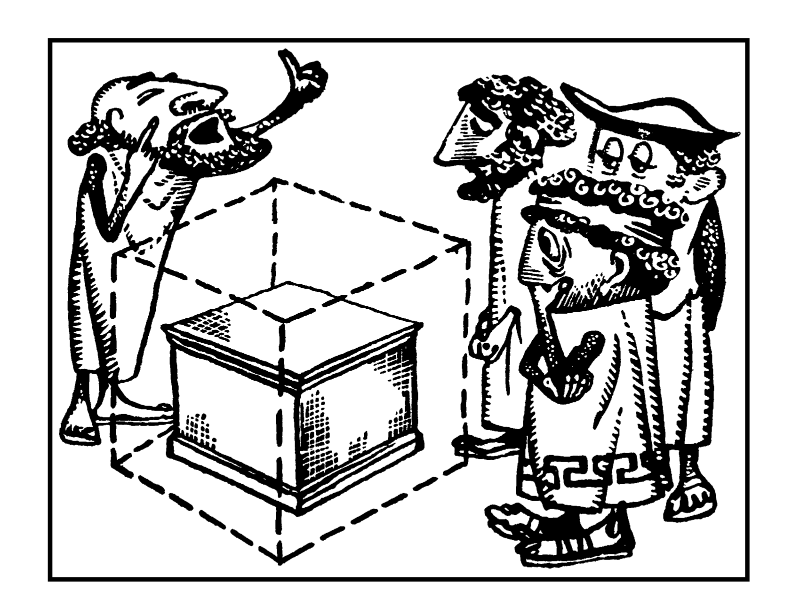
Несмотря на все это, проблема Ферма оказала плодотворное влияние на математику. Для разрешения этой проблемы введены новые идеальные элементы, так называемые и д е а л ы, которые оказались затем очень полезными и для развития более значительных разделов алгебры. Но даже с их помощью удалось доказать правильность гипотезы Ферма лишь для отдельных показателей и групп показателей. Во всей своей полноте задача остается нерешенной и по сей день. Вероятно, Ферма ошибся. Следует предположить, что он нашел доказательство лишь какого-то частного случая.

В математике существуют также задачи, которые при использовании ряда определенных методов являются заведомо неразрешимыми. Они относятся к числу окончательно решенных проблем, но — решенных в отрицательном смысле.

Задачами такого рода являются, например, квадратура круга и отыскание общего решения уравнения пятой степени. К этой категории проблем относится также трисекция (то есть деление на три равные части) угла и удвоение куба. Доказано, что эти задачи нельзя решить, пользуясь только циркулем и линейкой. С помощью их мы можем поделить угол пополам, но никак не на три равные части.

Удвоение куба является пространственным аналогом задачи об удвоении площади квадратного пруда.

На плоскости мы могли циркулем и линейкой построить сторону удвоенного квадрата, тогда как в пространстве нельзя построить теми же приспособлениями сторону куба, объем которого в два раза превышал бы объем данного куба. Эта проблема называется также «делосской задачей».



Легенда гласит, что боги потребовали от жителей острова Делос увеличить в два раза алтарь, имевший форму куба. Как ни пытались исполнить этот приказ, все было напрасно. Лишь Платон утешил опечаленных делоссцев: очевидно, боги всего лишь хотели своим приказом приохотить делоссцев к занятиям геометрией.

В теореме Геделя, однако, речь идет не о задачах, не решенных по сей день, и не о задачах, решенных в отрицательном смысле. Речь идет о задачах, которые нельзя разрешить, пользуясь принятой аксиоматической системой.

Вот как выглядит самый грубый набросок, показывающий ход рассуждений Геделя.

Допустим, у нас есть хорошо построенная аксиоматическая система для науки о натуральных числах, для арифметики. В аксиомах заключается все, что может понадобиться нам в этой области, и даже обращено внимание на то, чтобы в системе не появилось никакого противоречия. Допустим далее, что мы записали эту систему на языке символической логики, то есть всякое содержащееся в системе высказывание имеет вид последовательности знаков.

Каждой такой последовательности знаков мы можем поставить в соответствие какое-то число — точно так же, как в свое время мы точкам на плоскости ставили в соответствие пару чисел. Это можно сделать следующим образом.

Число логических и математических знаков — конечное; поставим им в соответствие первые простые числа (относя и единицу к простым числам). Пусть теперь, например, знаку 1 соответствует число 1 (других цифр нам уже и не нужно, потому что число 2 можно записать как 1+1, число 3 — как 1+1+1 и так далее). Пусть знаку «=» соответствует число 2; знаку «$\urcorner$», обозначающему «не», — число 3; знаку «+» — число s и так далее (выбор последовательности здесь не играет никакой роли). Допустим, что последнему знаку соответствует число 17. Тогда простые числа, начиная с 19, поставим в соответствие буквам x, y, ..., обозначающим неизвестные значения, входящие в высказывания системы. Пусть букве x соответствует число 19, букве y — 23 и так далее.

Таким образом, мы получаем такой словарь:

1 1
= 2
$\urcorner$ 3
\+ 5
....
x 19
y 23
....

Отсюда можно сразу вычитать, что формуле

$$1=1$$

соответствует тройка чисел

$$1,\ 2,\ 1.$$

Из этой тройки я хочу получить одно число. Очевидно, это можно сделать очень легко и даже не одним способом. Если, например, я сложу эти три числа, то получу 4. Но эта четверка как бы поглотила наши числа. Из нее нельзя никаким способом вычитать, какие числа ее породили и каким образом, в какой последовательности. Неизвестно даже, сколько может быть этих чисел-составляющих. Число 4 может быть получено, например, как $1+3$, как $3+1$, как $2+2$, как $1+1+2$, наконец, как $2+1+1$, а не только как $1+2+1$. Я хочу, однако, получить число, по которому можно было бы распознать составляющие его выражения. Это выполнимая задача. Например, я могу сначала взять три простых числа (именно простых, а не любых):

$$2,\ 3,\ 5$$

и рассматривать принадлежащие к нашей тройке числа

$$1,\ 2,\ 1$$

как показатели степеней. Возводя последовательно три написанных числа в эти степени и производя умножение, мы получаем произведение

$$2^1\cdot 3^2\cdot 5^1=10\cdot 3^2=10\cdot 9=90.$$

Поэтому формуле

$$1=1$$

соответствует число 90.

По нему легко можно прочесть формулу, которой оно было поставлено в соответствие. Достаточно только разложить число на простые множители, расположенные в порядке возрастания:

$$\begin{aligned}90&=2\cdot 45=\\&=2\cdot\overbrace{3\cdot 15}=\\&=2\cdot 3\cdot\overbrace{3\cdot 5}=\\&=2^1\cdot 3^2\cdot 5^1.\end{aligned}$$

В показателях степеней появились снова простые числа

$$1, 2, 1,$$

которые, согласно словарику, соответствуют знакам

$$1; =; 1.$$

Таким образом, по числу 90 мы безошибочно читаем соответствующую ему формулу:

$$1=1.$$

Точно так же каждому высказыванию системы соответствует некоторое число. Тем же самым способом можно поставить в соответствие каждому доказательству некоторое число. С формальной точки зрения доказательство есть не что иное, как некоторая последовательность высказываний (в которой каждое высказывание следует из предыдущего). Но высказываниям мы уже поставили в соответствие числа. Поэтому, например, доказательству, состоящему из трех высказываний, соответствует тройка чисел. Выражения этой тройки мы можем — так же, как и раньше, — свести к одному числу, из которого в любой момент мы можем «вернуться» и прочесть его составные части с помощью разложения на простые множители.

Допустим, что мы уже знаем о некотором ужасающе большом числе, что число это поставлено чему-то в соответствие. Представим себе далее, что мы обладаем ангельским терпением, позволяющим нам разложить это число на простые множители, и в результате разложения мы получаем

$$2^{90\,000\,000\,000\,000\,000\,000} \cdot 3^{90}.$$

Сразу видно, что показатели не являются простыми числами. Из этого следует, что наше число было поставлено в соответствие не отдельному высказыванию, а доказательству. Доказательство должно быть таким, что в нем используются два высказывания, которым соответствуют числа, записанные в показателях:

90 000 000 000 000 000 000 и 90.

Если мы разложим эти числа на простые множители, то прочитаем по ним соответствующие высказывания. В первом числе — девятнадцать нулей, поэтому оно равно

$$9 \cdot 10^{19} = 3^2 \cdot 10^{19} = 3^2 \cdot 2^{19} \cdot 5^{19},$$

потому что $10 = 2 \cdot 5$. Расположив последовательно основания в соответствии с их величиной, мы получаем:

$$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5^{19};$$

в показателях здесь тройка чисел:

$$19,\ 2,\ 19.$$

Разложение второго числа мы уже знаем:

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1,$$

и поэтому оно состоит из трех чисел:

$$1,\ 2,\ 1.$$

Вспомним наш словарик:

1....1	Отсюда можно прочесть, что первой тройке чисел, то есть 19, 2, 19,
=....2	
¬....3	соответствует формула
+....5	$x=x$,
......,	а второй тройке чисел, то есть
x.... 19	1, 2, 1,
y....23	соответствует формула
......	$1=1$.

Поэтому все доказательство, которому соответствует рассматриваемое нами «умопомрачительное» число, имеет следующий вид:
если для каждого x

$$x=x,$$

то отсюда следует, что

$$1=1.$$

Это совсем еще ничтожное доказательство, а ему уже соответствует число астрономических размеров; можно себе представить, сколь большое число будет соответствовать более серьезному доказательству. Но для нас существенно то, что мы знаем: в любом

случае ему будет соответствовать какое-то число, и, исходя из этого числа, можно раскрыть все доказательство (по крайней мере теоретически, так как на практике для этого могло бы не хватить человеческой жизни).

Итак, формулы и доказательства можно записывать в виде натуральных чисел. Но что это нам дает?

Метаматематика исследует систему извне; ее теоремы утверждают что-то касающееся тем или иным способом построенных формул и доказательств системы. Теперь эти теоремы можно преобразовать при помощи словаря так, чтобы речь шла о натуральных числах, имеющих те или иные разложения на простые множители.

Рассмотрим пример. Метаматематика, изучая формулы, которые удается записать при помощи знаков нашей системы, может прийти к выводу, что с формулами

$$1=1 \text{ и } \neg(1=1)$$

следует обращаться осторожно, потому что одна из них представляет собой отрицание другой. Мы уже видели, что формуле

$$1=1$$

соответствует число

$$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90.$$

Обратившись к словарику (при этом мы пренебрегаем простоты ради тем, что скобки тоже являются знаками и поэтому им тоже нужно поставить в соответствие какие-то числа), мы обнаруживаем, что

1....1	формуле
=....2	$\neg(1=1)$
$\neg$....3	соответствует четверка чисел
+....5	3, 1, 2, 1,
....	

которая — поскольку четыре первые простые числа — это 2, 3, 5 и 7 — образует число

$$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1.$$

Подсчитаем это число:

$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 100 \cdot 42 = 4200.$

Если мы сравним оба разложения на простые множители:

$$90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 1$$
$$4200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1,$$

то обнаружим, что метаматематическую теорему: «Каждая из формул

$$1 = 1 \text{ или } \neg\,(1 = 1)$$

является отрицанием другой» можно перевести следующим высказыванием: «Числа 90 и 4200 обладают тем свойством, что разложение второго числа на простые множители начинается с 2^3, тогда как показатели следующих простых чисел последовательно равны показателям разложения на простые множители первого числа — 90».

В последней фразе нет и следа метаматематики. Это чисто арифметическое утверждение. Однако рассматриваемая система именно для того и служит, чтобы формулировать в ней арифметические утверждения. И поэтому наше арифметическое утверждение, записанное выше, можно также записать при помощи знаков рассматриваемой нами системы, не пользуясь словами. Оно превратится в одну из обычных, заурядных последовательностей знаков, и никто не заметит его двусмысленности. И однако оно имеет два значения. Из него можно вы́читать два различных текста. Во-первых, арифметический текст, который мы можем прочесть в каждой формуле системы, когда вдумаемся в первичный смысл знаков. Во-вторых, текст метаматематического утверждения, облаченного в одежды арифметического утверждения.

И именно среди забав с этими двусмысленными последовательностями знаков и соответствующими им числами Геделю встретилось какое-то число — скажем, восемь миллиардов (в действительности мы знаем, каким образом это число составлено из простых

множителей, но для подсчета этого числа не хватило бы человеческой жизни). И Гедель обнаружил, что найденное число имеет следующее свойство: если так же, как и в случае утверждения только что рассмотренного, мы запишем с помощью знаков системы следующее математическое утверждение:

«Формула, которой соответствует число восемь миллиардов, не может быть доказана в системе», — и посмотрим, какое число соответствует согласно словарю полученной таким образом формуле, то обнаружим с изумлением, что число это равно... восьми миллиардам! Поэтому «формула, которой соответствует число восемь миллиардов», и есть эта самая формула. Одним из ее значений будет следующее:

«Я сама не могу быть доказанной».

Поймите, что это не только игра слов или какой-то софизм. Перед нами обычная, ничем не примечательная формула, такая же, как и все другие. Если мы посмотрим в словаре, какое побочное значение придает этой последовательности знаков метаматематика, то увидим следующее:

«Я не могу быть доказанной».

Ничего удивительного, что эта формула неразрешима в системе, даже если ее другим значением оказывается совершенно невинное арифметическое утверждение.

Дело в том, что если бы можно было эту формулу доказать, то мы впали бы в противоречие с тем, что формула выражает в метаматематическом смысле: ведь она говорит именно о том, что ее нельзя доказать.

Если же ее можно было бы опровергнуть, то такое опровержение было бы одновременно утверждением истинности того математического высказывания, которое гласит: формулу нельзя доказать. И поэтому опровержение формулы было бы в то же время доказательством ее истинности.

Итак, эту формулу нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Она неразрешима.

Я подчеркиваю еще раз: если кому-нибудь не придет в голову заглянуть в словарик, то эта последовательность знаков будет обычной, ничем не примечательной формулой системы, невинным высказыванием о сложении и умножении. Гедель показал, что существуют неразрешимые проблемы в каждой содержательной системе. Не исключено, что к проблемам такого рода относится, например, проблема Гольдбаха. Быть может, поэтому ее и не удалось разрешить до сего дня. Возможно, что если из средств, с которыми мы подступались к этой гипотезе, мы составили бы формализованную систему аксиом, то формальным выражением гипотезы Гольдбаха оказалась бы именно та формула, которая на языке нашего словарика промурлычет песенку:

«Я не могу быть разрешена в системе».

Это же можно сказать о всех не разрешенных до сего дня проблемах. Каждый математик должен считаться с такой возможностью.

Можно было бы высказать возражение: все это, мол, получается только как результат несовершенства аксиоматических систем. Возможно, проблемы, на которых ставят крест результаты Геделя, удалось бы все же разрешить, если бы мы не ограничивались некоторой аксиоматической системой. Но это не так.

Алонзо Черч сформулировал проблему, которую нельзя разрешить никакими из тех математических средств, какие только можно сегодня придумать, совершенно независимо от того, будут или нет наши рассуждения ограничены рамками аксиоматической системы.

* * *

Здесь мы, пожалуй, и поставим точку. Мы добрались до пределов современной математической мысли. Наша эпоха — это эпоха пробуждения и развития знаний. В этом математика также сыграла свою роль: она сама открыла границы своих собственных возможностей.

Имеем ли мы, однако, право сказать, что мы достигли последних пределов, непреодолимых преград? Из всех тупиков в истории математики находился всегда какой-то выход. Да и в доказательстве Черча есть один многозначительный момент. Черч должен был точно определить, что он имеет в виду, говоря о «всех математических средствах, какие только можно сегодня представить». Лишь после того как такое определение дано, можно применять к этому понятию математические методы. Однако дать формулировку какого-либо понятия или явления — значит тем самым подвергнуть его одновременно некоторому ограничению. А всякий забор стеснителен. Появляющиеся неразрешимые проблемы не выносят этого стеснения и выскальзывают вовне.

Будущее развитие математики наверняка расширит ее горизонты, хотя сегодня далеко не всегда еще ясно, как именно это может осуществиться. Одно мы должны запомнить раз и навсегда: математика не является чем-то статичным и замкнутым, это наука, живущая все более и более напряженной жизнью, постоянно развивающаяся. Как только ее пытаются замкнуть в какие-то строгие формы, она непременно находит лазейку и рано или поздно вырывается на свободу, утверждая свою жизнеспособность.

ПРОЧИТАВШЕМУ КНИГУ

Если читателю захочется вновь обратиться, например, к разделу, где говорится об интегралах, то в оглавлении он найдет только заглавие «С миру по нитке — голому рубаха». Поэтому я хочу дать перечень математических понятий, которые содержались в той или иной главе, в том или ином разделе. Единственное, о чем я прошу читателя, еще не прочитавшего книгу и тем не менее поглядевшего на эту страницу, не пугаться сразу и все же попробовать вернуться к самому началу книги, с которого, как правило, и начинают чтение.

ЧАСТЬ I

1. Сложение. Умножение. Возведение в степень.

2. Объем куба. Графическое представление функций.

3. Системы счисления. Правила делимости.

4. Арифметическая прогрессия. Площадь прямоугольника и площадь треугольника.

5. Диагонали выпуклых многоугольников. Комбинации из двух элементов. Формулы.

Добавление: Топология. Равенство и подобие. Правильные многогранники.

6. Комбинаторика. Полная индукция. Квадрат суммы двух чисел.

7. Разложение на простые множители. Размещение простых чисел. Теорема о размещении простых чисел.

8. Уравнения. Неразрешимость уравнения пятой степени. Теория Галуа.

ЧАСТЬ II

9. Отрицательные числа. Векторы. Принцип непрерывности.

10. Действия с дробями. Всюду плотное множество. Мощность множества рациональных чисел.

11. Замена простых дробей десятичными и обратная замена. Бесконечные ряды.

12. Иррациональное число. Теорема Пифагора. Мощность множества действительных чисел.

13. Логарифмические таблицы. Расширение понятия степени. Гладкие кривые. Гипербола. Деление на нуль.

14. Общее понятие функции. Аналитическая геометрия.

Добавление: а) Тригонометрические функции. Аппроксимация (приближение) периодической функции.

б) Проективная геометрия. Инварианты.

15. Прямая в бесконечности. Комплексные числа. Зависимость между тригонометрическими функциями и показательной функцией. Основная теорема алгебры. Разложение функций в степенные ряды.

16. Направление касательной. Производная. Максимум и минимум.

17. Определенный и неопределенный интегралы. Нахождение площадей.

ЧАСТЬ III

18. Квадратура круга. Система аксиом Евклида. Гиперболическая геометрия. Разные геометрии.

Добавление: Четвертое измерение.

19. Теория групп. Теория множеств. Парадоксы. Интуиционизм.

20. Символическая логика.

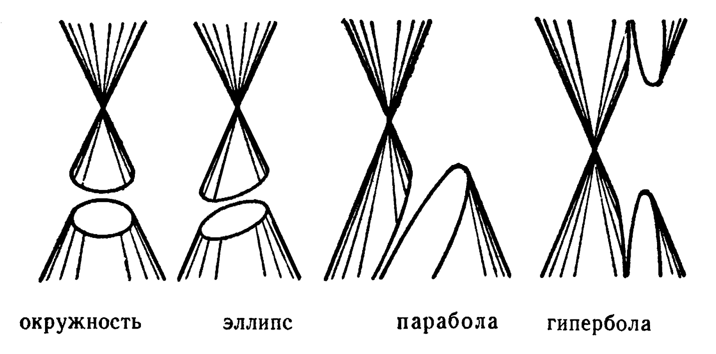
21. Теория доказательства. Метаматематика. Доказательство непротиворечивости арифметики. Гипотеза континуума.

Добавление: Аксиоматизация анализа.

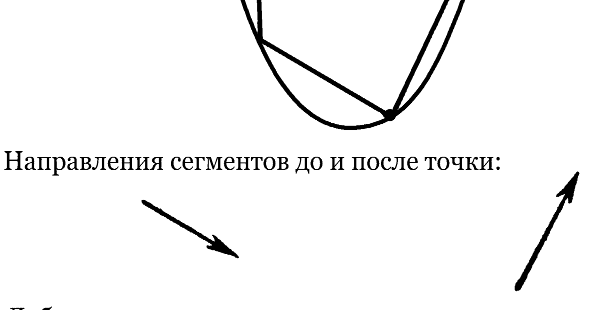
22. Неразрешенные проблемы и задачи, которые невозможно решить определенными средствами. Вопрос о так называемых неразрешимых проблемах.

СОДЕРЖАНИЕ

Joker2156: Рисунок на странице 212 содержит ошибку, эллипс образуется при сечении конуса наклонной плоскостью, ниже исправленный рисунок:



Страницы 249-251 : Рисунки парабол не точные, ниже правильная последовательность:

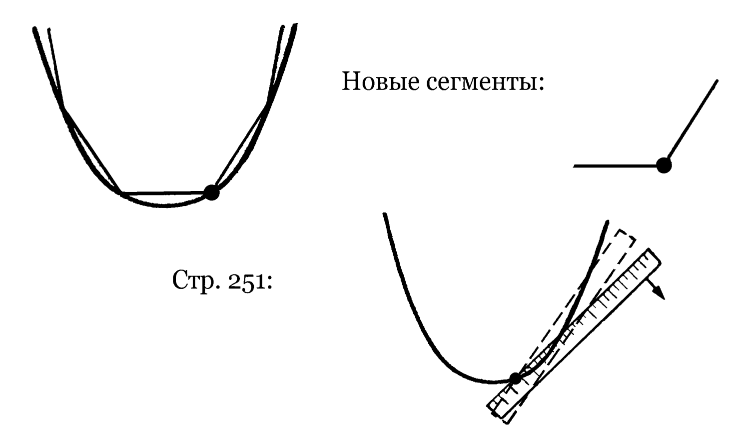


Направления сегментов до и после точки:

Добавляем промежуточные точки:

Новые сегменты:

Стр. 251:



93 коп.

РОЗА ПЕТЕР

Роза Петер, венгерский ученый, доктор математических наук, лауреат премии Кошута, профессор Будапештского университета, написала немало книг и научных статей. Она принимала активное участие в создании важной области современной математики — теории рекурсивных функций, о которой в 1951 году написала первую в истории науки монографию.

Роза Петер всегда сочетала научную работу с педагогической деятельностью. Помимо работы в высших учебных заведениях, вместе с другими крупными математиками Венгерской Народной Республики она много сделала для улучшения методов преподавания математики в венгерских школах.

Книга «Игра с бесконечностью» не только блестящий очерк об идеях и методах математики, она — гражданский подвиг Розы Петер. Создавая эту книгу в годы фашистской диктатуры, она боролась оружием ученого за гуманистические идеалы, за торжество человеческого разума.

МОЛОДАЯ ГВАРДИЯ
МОСКВА, 1967